ORSAY
Sér. n. N°
N° D'ordre
N° 647

Parijs 1970

THESE

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

pour obtenir le ~~titre~~ grade de Docteur es Sciences

par

Christian IMBERT

Sujet : EFFET INERTIAL DE SPIN DU PHOTON : THEORIE ET PREUVE EXPERIMENTALE.

Soutenue le 29 mai 1970 devant la Commission d'Examen :

MM. A. KASTLER - Président

A. LICHNEROWICZ)
A. MARECHAL) examinateurs.
O. COSTA DE BEAUREGARD)

N° 647

THESE

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

pour obtenir le titre de Docteur es Sciences

par

Christian IMBERT

Sujet : EFFET INERTIAL DE SPIN DU PHOTON : THEORIE ET PREUVE EXPERIMENTALE.

Soutenue le 29 mai 1970

devant la Commission d'Examen :

MM. A. KASTLER - Président

A. LICHNEROWICZ)
A. MARECHAL)examinateurs.
O. COSTA DE BEAUREGARD)

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

TABLE DES MATIERES

Introduction.

Chapitre I - Existence d'une composante du vecteur de Poynting non colinéaire au vecteur d'onde d'une onde plane en propagation dans un milieu homogène et isotrope.

I-1. Expression du vecteur de Poynting $\vec{\mathcal{S}}$.
I-2. Etude de la direction de $\vec{\mathcal{S}}$.
I-3. $\vec{\mathcal{S}}_2$ est un rotationnel.
I-4. Relation entre $\vec{\mathcal{S}}_{2\perp}$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\mathcal{S}}$.
I-5. Etude des divers cas possibles.

Chapitre II - Etude du vecteur de Poynting relatif aux ondes transmises par un dioptre plan : existence d'une composante perpendiculaire au plan d'incidence.

II-1. Expressions des champs dans les deux milieux.
II-2. Expressions des vecteurs de Poynting dans les deux milieux.
II-3. $\mathcal{S}_y$ est la composante d'un rotationnel.
II-4. Discussion des résultats.
II-5. Obliquité du rayon transmis par le dioptre plan quand le second milieu est absorbant.

Chapitre III - Etude de l'onde évanescente : prévision d'un décalage perpendiculaire au plan d'incidence.

III-1. Expressions des champs et du vecteur de Poynting dans les deux milieux.
III-2. Expression du décalage latéral du faisceau réfléchi.
III-3. Remarque sur le calcul du flux dans les deux milieux.
III-4. Application au cas où la vibration incidente est polarisée circulairement.
III-5. Prévision du décalage utilisant l'isomorphisme entre la statique du fil raide et la dynamique du photon polarisé circulairement.

.../...

Chapitre IV - Vérification expérimentale de l'effet inertial de spin du photon.

IV-1. Principe de l'expérience.

IV-2. Description des systèmes permettant d'amplifier l'effet.

IV-3. Description du montage.

IV-4. Résultats expérimentaux.

IV-5. Vérifications.

Conclusions.

.../...

INTRODUCTION

Cette recherche a pour objet de tester expérimentalement l'idée, soutenue par divers auteurs ([1]) à ([13]), selon laquelle la quadrivitesse et l'impulsion-énergie d'une particule à spin ne sont pas colinéaires. Il ressort de l'étude faite par O. COSTA DE BEAUREGARD, qui a examiné successivement le cas de l'électron ([14]) ([15]) et du photon ([16]) ([17]), que la vérification expérimentale sur l'électron semble difficile en raison de la très faible valeur de la longueur d'onde associée. Par contre le photon laisse une possibilité d'atteindre le phénomène dans le domaine optique ou dans le domaine hertzien.

Dans l'approximation de l'optique géométrique, qui est aussi celle des mécaniques classique et relativiste, une présentation très parlante de la question utilise l'isomorphisme des équations de la dynamique de la particule à spin (équations dites de WEYSSENHOF) et des équations de la statique du fil raide ([18]).

Nous présentons cet isomorphisme dans le tableau suivant (on fait $c = 1$).

.../...

Statique classique du fil raide		Dynamique relativiste du point matériel à spin	
Espace euclidien 3-dimensionnel		Espace-temps pseudo euclidien 4-dimensionnel ($x^4 = it$; $i,j,k,l = 1,2,3,4$)	
Abscisse curviligne	s	Temps propre	τ
Point courant du fil	$\vec{r}$	Instant-point courant	x^i
Vecteur unité tangent $\vec{t}^2 = 1$	$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$	4-vitesse $V_i V^i = -1$	$V^i = \frac{dx^i}{d\tau}$
Tension	$\vec{T}(s)$	Impulsion-énergie	$P^i(\tau)$
Densité linéaire de force appliquée	$\vec{f}(s)$	4-force appliquée	$F^i(\tau)$
1ère équation	$\vec{f} = \frac{d\vec{T}}{ds}$	1ère équation	$F^i = \frac{dP^i}{d\tau}$
"Raideur" ou résistance à la courbure et à la torsion	$\vec{\gamma}$	"Spin" ou moment angulaire interne	S^{ij}
Densité linéaire de couple appliqué	$\vec{\mu}$	Couple appliqué	M^{ij}
2ème équation	$\vec{\mu} = \vec{t} \wedge \vec{T} + \frac{d\vec{\gamma}}{ds}$	2ème équation	$M^{ij} = V^i P^j - V^j P^i + \frac{dS^{ij}}{d\tau}$

.../...

La première équation de la statique du fil raide s'obtient en écrivant l'équilibre des forces, la seconde celle des moments des couples (couple des tensions $\vec{T} \wedge d\vec{r}$, différence des couples appliqués aux extrémités $d\vec{\sigma}$, couple réparti le long du fil $\vec{\mu}\, ds$).

A ces équations générales il convient d'ajouter des équations de liaison qui dépendent de la nature du problème étudié, citons par exemple la condition de WEYSSENHOF : $S^{ij} V_j = 0$.

La présence des produits extérieurs ($\vec{t} \wedge \vec{T}$ pour le fil et $V^i P^j - V^j P^i$ pour la particule à spin) met en évidence la non colinéarité de la vitesse et de l'impulsion.

Du fait de la raideur du fil (ou de la présence du spin de la particule) la figure d'équilibre (ou la trajectoire de la particule) sera moins simple que celle existant lorsqu'il n'y a pas de raideur (ou de spin) car celle-ci impose à la courbe (ou à la trajectoire) un léger festonnement. Celui-ci a d'ailleurs été prévu théoriquement sous forme quantique, pour l'électron, par SCHRÖDINGER (Zitterbewegung ou tremblement de SCHRÖDINGER).

Laissant donc de côté le problème de l'électron pour ne retenir que celui du photon nous allons retrouver les précédents résultats en utilisant le langage de l'électromagnétisme de MAXWELL.

Considérons une onde électromagnétique harmonique dont les champs sont indépendants de la coordonnée cartésienne y (problème plan). Afin de simplifier l'écriture nous ferons $c = 1$ et $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1$. Dans le cas où cette onde est polarisée circulairement O. COSTA DE BEAUREGARD ([16]) a montré que bien que la composante k_y de l'impulsion des photons soit identiquement nulle, la composante $\mathcal{S}_y$ du courant de Poynting a une valeur non nulle proportionnelle à $\overrightarrow{\mathrm{rot}}_y \vec{\mathcal{S}}$, avec un signe correspondant à celui de l'hélicité. En utilisant la méthode de BORGNIS ([19]) on obtient des solutions du type "électrique" (E) et "magnétique" (H) de l'équation :

$$(\partial_x^2 + \partial_z^2 + \omega^2)\, U(x, z) = 0.$$

.../...

On a :

$$(E) : H_z = j\,\omega\,\partial_x U, \qquad H_x = -\,j\,\omega\,\partial_z U, \qquad E_y = \omega^2 U,$$

$$(H) : E_z = \pm\,\omega\,\partial_x U, \qquad E_x = \mp\,\omega\,\partial_z U, \qquad H_y = \pm\,\omega^2 U.$$

Nous avons pris la même fonction U dans les solutions (E) et (H) ce qui s'avèrera être permis dans les cas que nous allons étudier. Afin d'obtenir par la superposition (E) + (H) des ondes à polarisations circulaires gauche et droite, nous introduisons un facteur de phase relative $\pm\,j$ $(j = \sqrt{-1})$.

Le vecteur de Poynting :

$$\vec{\mathcal{S}} = \frac{1}{4}\,\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{H}}^* + \text{conjugué},$$

a alors pour composantes :

$$\vec{\mathcal{S}} \begin{cases} \mathcal{S}_x = \dfrac{1}{2}\,j\,\omega^3\,(U^*\,\partial_x U - U\,\partial_x U^*), \\[2ex] \mathcal{S}_y = \pm\,\dfrac{1}{2}\,j\,\omega^2\,(\partial_z U^*\,\partial_x U - \partial_x U^*\,\partial_z U), \\[2ex] \mathcal{S}_z = \dfrac{1}{2}\,j\,\omega^3\,(U^*\,\partial_z U - U\,\partial_z U^*). \end{cases}$$

Nous voyons que $\mathcal{S}_y$ est différent de zéro bien que l'impulsion dans la direction Oy soit nulle.

$\mathcal{S}_y$ satisfait la relation :

$$\pm\,2\,\omega\,\mathcal{S}_y = \partial_z\,\mathcal{S}_x - \partial_x\,\mathcal{S}_z\,,$$

.../...

ou sous forme intégrale :

$$\omega \iint \mathcal{S}_y \, dx \, dz = \pm \frac{1}{2} \oint (\mathcal{S}_x \, dx + \mathcal{S}_z \, dz) \; ;$$

c'est là, sous forme invariante de jauge, l'expression de l'effet inertial de spin du photon.

Afin de tester expérimentalement l'existence d'un flux d'énergie non colinéaire à l'impulsion il nous faut trouver des ondes telles que $\mathcal{S}_y$ existe et que d'autre part le flux de $\mathcal{S}_y$ à travers tout le plan y = cte, soit différent de zéro.

Nous allons dans une première partie montrer que les ondes ayant cette propriété sont d'une part celles en propagation dans un milieu absorbant et d'autre part les ondes évanescentes. Nous montrons en particulier qu'elles satisfont la relation générale de l'effet inertial de spin et que l'existence de cette composante $\mathcal{S}_y$ est liée à la non nullité de rot $\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{E}}^*$, $\vec{\mathcal{E}}$ étant le champ électrique. Un système simple permettant d'obtenir ces types d'ondes étant le dioptre plan, une seconde partie est consacrée à son étude. Une troisième partie traite du cas particulier où la réflexion est totale. On montre alors, qu'à la réflexion, le faisceau subit un décalage dans la direction perpendiculaire au plan d'incidence, sa valeur étant accessible à la mesure. La dernière partie est consacrée à la vérification expérimentale, les valeurs obtenues étant en très bon accord avec les expressions théoriques.

- Chapitre I -

EXISTENCE D'UNE COMPOSANTE DU VECTEUR DE POYNTING NON COLINEAIRE AU VECTEUR D'ONDE D'UNE ONDE PLANE EN PROPAGATION DANS UN MILIEU HOMOGENE ET ISOTROPE

Nous intéressant aux ondes harmoniques, le milieu sera caractérisé par sa perméabilité μ et sa permittivité complexe ε. Dans un tel milieu le champ électrique $\vec{\mathcal{E}}$ est tel que $\operatorname{div} \vec{\mathcal{E}} = 0$. Il satisfait d'autre part l'équation vectorielle d'Helmholtz :

$$\Delta \vec{\mathcal{E}} + k^2 \vec{\mathcal{E}} = 0.$$

Cette équation admet une solution de la forme :

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E} \; e^{-j\vec{K}\vec{r}} \; e^{j\omega t} \qquad \text{(I-1)}$$

avec $\vec{K}^2 = k^2 = \mu \varepsilon \omega^2$ et $\vec{K} = k \vec{u}$,

$\vec{u}$ étant un vecteur unitaire de composantes (réelles ou complexes) α, β, γ telles que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Pour tenir compte de la polarisation des ondes, $\vec{E}$ sera un vecteur complexe

Le champ magnétique est donné par :

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu \; \omega} \vec{K} \wedge \vec{\mathcal{E}} \; : \qquad \text{(I-2)}$$

.../...

Si k ou $\vec{u}$ sont complexes, $\vec{K}$ le sera aussi. On pose :

(I-3) $$\vec{K} = \vec{k}_0 + j\,\vec{k}_1$$

avec $\vec{k}_0$ et $\vec{k}_1$ réels.

En portant (I-3) dans (I-1) le champ électrique s'écrit :

(I-4) $$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E}\; e^{\vec{k}_1 \vec{r}}\; e^{-j\vec{k}_0 \vec{r}}\; e^{j\omega t}.$$

Cette expression représente une onde plane inhomogène : les plans équiphases sont perpendiculaires au vecteur $\vec{k}_0$ (qui définit la direction de propagation de la phase) ; les plans équi-amplitudes sont perpendiculaires au vecteur $\vec{k}_1$ (qui caractérise l'atténuation de l'onde au cours de sa propagation).

I-1. Expression du vecteur de Poynting $\vec{\mathcal{P}}$.

On calcule le vecteur de Poynting défini par :

(I-5) $$\vec{\mathcal{P}} = \overline{R_e(\vec{\mathcal{E}}) \wedge R_e(\vec{\mathcal{H}})} = \frac{1}{4}\left(\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{H}}^* + \vec{\mathcal{E}}^* \wedge \vec{\mathcal{H}}\right).$$

Choisissons un système d'axes Oxyz tel que $\vec{k}_0$ soit porté par Oz et $\vec{k}_0 \wedge \vec{k}_1$ par Oy, donc $K_y = 0$. Soit θ l'angle $(\vec{k}_0, \vec{k}_1)$, fig. (I-1).

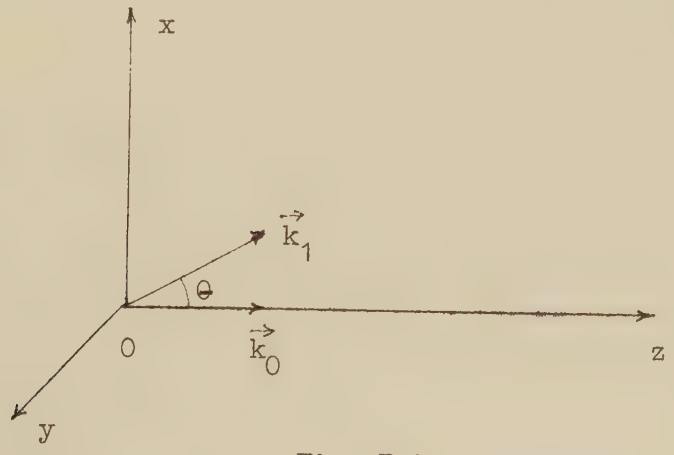


Fig. I-1.

En remplaçant dans (I-5) $\vec{\mathcal{H}}$ par son expression tirée de (I-2) nous obtenons :

$$4\,\vec{\mathcal{S}} = \frac{1}{\mu\,\omega}\;\vec{\mathcal{E}} \wedge (\vec{K}^* \wedge \vec{\mathcal{E}}^*) + \text{conjugué.}$$

En considérant μ comme réel cette équation devient, après développement du double produit vectoriel :

$$4\,\mu\,\omega\,\vec{\mathcal{S}} = (\vec{\mathcal{E}}.\vec{\mathcal{E}}^*)(\vec{K}^* + \vec{K}) - \left[(\vec{\mathcal{E}}.\vec{K}^*)\vec{\mathcal{E}}^* + (\vec{\mathcal{E}}^*.\vec{K})\vec{\mathcal{E}}\right] = 4\,\mu\,\omega\,(\vec{\mathcal{S}}_1 + \vec{\mathcal{S}}_2)$$

avec

$$\text{(I-6)}\quad \begin{cases} 4\,\mu\,\omega\,\vec{\mathcal{S}}_1 = (\vec{\mathcal{E}}.\vec{\mathcal{E}}^*)\,(\vec{K} + \vec{K}^*), \\[2ex] 4\,\mu\,\omega\,\vec{\mathcal{S}}_2 = -\left[(\vec{\mathcal{E}}.\vec{K}^*)\vec{\mathcal{E}}^* + (\vec{\mathcal{E}}^*.\vec{K})\vec{\mathcal{E}}\right]. \end{cases}$$

Les expressions (I-6) nous montrent que, <u>dans certains cas, il peut y avoir une composante non nulle du vecteur de Poynting dans la direction Oy (perpendiculaire à $\vec{K}$) bien que $\vec{\mathcal{E}}$ soit indépendant de y</u> ($K_y = 0$). Afin de déterminer les cas réels où $\mathcal{S}_y$ existe, nous allons étudier plus en détail l'orientation de $\vec{\mathcal{S}}$ ([20] [11])

I-2. Etude de la direction de $\vec{\mathcal{S}}$.

On décompose le champ électrique $\vec{\mathcal{E}}$ en deux composantes $\vec{\mathcal{E}}_{\parallel}$ et $\vec{\mathcal{E}}_{\perp}$ qui sont respectivement dans le plan $\vec{k}_0$, $\vec{k}_1$, et sur l'axe Oy (colinéaire à $\vec{k}_0 \wedge \vec{k}_1$).

La condition div $\vec{\mathcal{E}} = 0$ impose $\vec{K}.\vec{\mathcal{E}} = 0$, et comme $\vec{K}^2 = k^2$ nous aurons :

$$\vec{K}\begin{cases} K_x = j\,k_1 \sin\theta \\[1ex] 0 \\[1ex] K_z = k_0 + j\,k_1 \cos\theta \end{cases} \qquad \vec{\mathcal{E}}\begin{cases} \mathcal{E}_x = \dfrac{K_z}{k}\,\mathcal{E}_{\parallel} \\[2ex] \mathcal{E}_y = \mathcal{E}_{\perp} \\[2ex] \mathcal{E}_z = -\dfrac{K_x}{k}\,\mathcal{E}_{\parallel} \end{cases}$$

.../...

En portant ces valeurs dans la première relation (I-6) on obtient :

(I-7) $$4\,\mu\,\omega\,\vec{\mathcal{J}}_1 = (\vec{\mathcal{E}}\,.\,\vec{\mathcal{E}}^*)\,(\vec{K} + \vec{K}^*) = 2\,(\vec{\mathcal{E}}\,.\,\vec{\mathcal{E}}^*)\,\vec{k}_0$$

où

$$4\,\mu\,\omega\,\vec{\mathcal{J}}_1 = 2\,(\mathcal{E}_{\parallel}\,\mathcal{E}_{\parallel}^* + \mathcal{E}_{\perp}\,\mathcal{E}_{\perp}^*)\,\vec{k}_0$$

et $\vec{\mathcal{J}}_1$ est colinéaire à $\vec{k}_0$.

D'autre part nous avons :

$$\vec{\mathcal{E}}.\vec{K}^* = \frac{\mathcal{E}_{\parallel}}{k}\,(K_x^*\,K_z - K_z^*\,K_x)$$

et

$$\vec{\mathcal{E}}^*.\vec{K} = -\frac{\mathcal{E}_{\parallel}^*}{k^*}\,(K_x^*\,K_z - K_z^*\,K_x)\ ;$$

or :

$$K_x^*\,K_z - K_z^*\,K_x = (\vec{K} \wedge \vec{K}^*)\,\vec{u}_y = 2\,j\,(\vec{k}_1 \wedge \vec{k}_0)\,\vec{u}_y.$$

La deuxième relation (I-6) devient alors :

$$4\,\mu\,\omega\,\vec{\mathcal{J}}_2 = -\left(\frac{\mathcal{E}_{\parallel}}{k}\,\vec{\mathcal{E}}^* - \frac{\mathcal{E}_{\parallel}^*}{k^*}\,\vec{\mathcal{E}}\right)\left[(\vec{K} \wedge \vec{K}^*)\,\vec{u}_y\right]$$

et $\vec{\mathcal{J}}_2$ admet pour composantes :

$$4\,\mu\,\omega\,\vec{\mathcal{J}}_2 = 2\,j\,k_1\,k_0\,\sin\theta \begin{cases} \mathcal{E}_{\parallel}\,\mathcal{E}_{\parallel}^*\,\dfrac{K_z^* - K_z}{k\,k^*} = -\,2\,j\,\dfrac{k_1}{k\,k^*}\,\mathcal{E}_{\parallel}\,\mathcal{E}_{\parallel}^*\,\cos\theta \\[2ex] \dfrac{\mathcal{E}_{\parallel}\,\mathcal{E}_{\perp}^*}{k} - \dfrac{\mathcal{E}_{\parallel}^*\,\mathcal{E}_{\perp}}{k^*} \\[2ex] \mathcal{E}_{\parallel}\,\mathcal{E}_{\parallel}^*\,\dfrac{K_x^* - K_x}{k\,k^*} = -\,2\,j\,\dfrac{k_1}{k\,k^*}\,\mathcal{E}_{\parallel}\,\mathcal{E}_{\parallel}^*\,\sin\theta \end{cases}$$

.../...

$\vec{\mathcal{S}}_2$ peut donc se décomposer en deux vecteurs, l'un $\vec{\mathcal{S}}_{2\parallel}$ dans le plan $(\vec{k}_1, \vec{k}_0)$ et l'autre, noté $\vec{\mathcal{S}}_{2\perp}$, porté par $\vec{k}_0 \wedge \vec{k}_1$.

$\vec{\mathcal{S}}_{2\parallel}$, de composantes $\mathcal{S}_{2x}$ et $\mathcal{S}_{2z}$ est tel que $\vec{k}_1 . \vec{\mathcal{S}}_{2\parallel} = 0$, et étant dans le plan y = 0 il est colinéaire au vecteur $\vec{u}_y \wedge \vec{k}_1$.

$\vec{\mathcal{S}}_{2\perp}$, de composante $\mathcal{S}_{2y}$, est colinéaire au vecteur $\vec{k}_0 \wedge \vec{k}_1$.

d'où finalement :

$$\text{(I-8-a)} \quad \begin{cases} 4\,\mu\,\omega\,\vec{\mathcal{S}}_{2\parallel} = 4\,\dfrac{(\vec{k}_0 \wedge \vec{k}_1)\,\vec{u}_y}{k\,k^*}\,\mathcal{E}_\parallel \mathcal{E}^*_\parallel\,(\vec{u}_y \wedge \vec{k}_1) \\[2ex] \qquad = \dfrac{(\vec{K} \wedge \vec{K}^*)\,\vec{u}_y}{k\,k^*}\,\mathcal{E}_\parallel \mathcal{E}^*_\parallel\,\vec{u}_y \wedge (\vec{K} - \vec{K}^*) \end{cases}$$

$$\text{(I-8-b)} \quad \begin{cases} 4\,\mu\,\omega\,\vec{\mathcal{S}}_{2\perp} = \dfrac{2\,j}{k\,k^*}\,(k^*\,\mathcal{E}_\parallel \mathcal{E}^*_\perp - k\,\mathcal{E}^*_\parallel \mathcal{E}_\perp)\,(\vec{k}_0 \wedge \vec{k}_1) \\[2ex] \qquad = -\,(k^*\,\mathcal{E}_\parallel \mathcal{E}^*_\perp - k\,\mathcal{E}^*_\parallel \mathcal{E}_\perp)\,\dfrac{\vec{K} \wedge \vec{K}^*}{k\,k^*} \end{cases}$$

Le vecteur de Poynting est donc égal à la somme des trois vecteurs :

$$\vec{\mathcal{S}} = \vec{\mathcal{S}}_1 + \vec{\mathcal{S}}_{2\parallel} + \vec{\mathcal{S}}_{2\perp}.$$

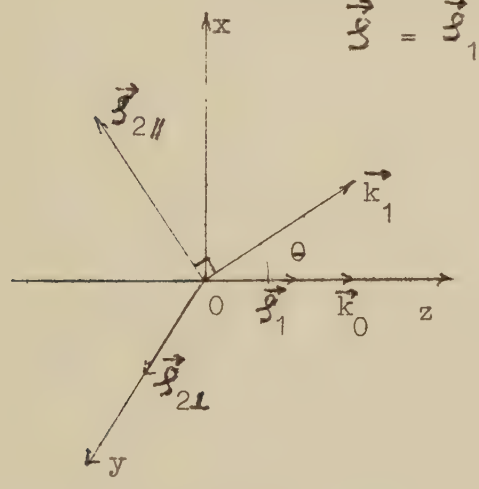


Fig. I-2.

$\vec{\mathcal{S}}_1$ est colinéaire à $\vec{k}_0$ et existe indépendamment de $\vec{k}_1$.

$\vec{\mathcal{S}}_{2\parallel}$ est dans le plan $(\vec{k}_1, \vec{k}_0)$ et est porté par une droite perpendiculaire à $\vec{k}_1$.

$\vec{\mathcal{S}}_{2\perp}$ <u>et</u> $\vec{\mathcal{S}}_{2\parallel}$ <u>ne peuvent exister que si</u> $\vec{k}_0 \wedge \vec{k}_1 \neq 0$.

.../...

I-3. $\vec{\mathcal{S}}_2$ est un rotationnel. (21 ")

La deuxième équation (I-6) s'écrit :

$$4\,\mu\,\omega\,\vec{\mathcal{S}}_2 = -(\vec{\mathcal{E}}.\vec{K}^*)\vec{\mathcal{E}}^* + \text{conjugué}$$

$$= (\mathcal{E}_x K_x^* + \mathcal{E}_z K_z^*)\vec{\mathcal{E}}^* + \text{conjugué} ;$$

comme $\partial_i \vec{\mathcal{E}}^* = j\,K_i\,\vec{\mathcal{E}}^*$,

$$4\,\mu\,\omega\,\vec{\mathcal{S}}_2 = j\,(\mathcal{E}_x\,\delta_x\vec{\mathcal{E}}^* + \mathcal{E}_z\,\delta_z\,\vec{\mathcal{E}}^*) + \text{conjugué}$$

$$= j\left(\frac{d\vec{\mathcal{E}}^*}{d\vec{\mathcal{E}}} - \frac{d\vec{\mathcal{E}}}{d\vec{\mathcal{E}}^*}\right) ;$$

comme $\operatorname{div}\vec{\mathcal{E}} = \operatorname{div}\vec{\mathcal{E}}^* = 0$, cette relation peut s'écrire :

$$4\,\mu\,\omega\,\vec{\mathcal{S}}_2 = j\left(\vec{\mathcal{E}}^*\operatorname{div}\vec{\mathcal{E}} - \vec{\mathcal{E}}\operatorname{div}\vec{\mathcal{E}}^* + \frac{d\vec{\mathcal{E}}^*}{d\vec{\mathcal{E}}} - \frac{d\vec{\mathcal{E}}}{d\vec{\mathcal{E}}^*}\right).$$

La parenthèse du second membre est le développement de $\operatorname{rot}(\vec{\mathcal{E}}^* \wedge \vec{\mathcal{E}})$, d'où

(I-9) $$\boxed{4\,\mu\,\omega\,\vec{\mathcal{S}}_2 = -j\,\operatorname{rot}\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{E}}^*}$$

$\vec{\mathcal{S}}$ peut donc s'écrire :

(I-10) $$\boxed{4\,\mu\,\omega\,\vec{\mathcal{S}} = (\vec{\mathcal{E}}.\vec{\mathcal{E}}^*)(\vec{K}^* + \vec{K}) - j\,\operatorname{rot}\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{E}}^*.}$$

Cette relation (I-9) montre que l'existence de $\mathcal{S}_y$ est liée à la non nullité de $(\operatorname{rot}\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{E}}^*)_y$, car le premier terme du second membre n'a pas de composante

.../...

dans cette direction. Ainsi, pour calculer $\mathcal{S}_y$ il suffit de calculer :

$$\text{(I-11)} \qquad \mathcal{S}_y = -\frac{j}{4\,\mu\,\omega}\,(\,\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{E}}^*)_y .$$

Notons aussi que pour calculer le flux de $\vec{\mathcal{S}}_y$ à travers une surface y = Cte limitée par un contour C il suffit de calculer la circulation de $\frac{j}{4\,\mu\,\omega}\,(\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{E}}^*)$ le long de ce contour. Nous reviendrons ultérieurement sur ce type de calcul.

On peut généraliser cette propriété qui reste vérifiée pour une onde quelconque à condition qu'elle soit harmonique.

I-4. Relation entre $\vec{\mathcal{S}}_{2\perp}$ et $\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{S}}$.

O. COSTA De BEAUREGARD a montré ([16]) que dans un problème plan où les fonctions d'onde sont indépendantes de y et dépendantes du temps par un même facteur $e^{j\omega t}$, les solutions à polarisation circulaire gauche et droite sont respectivement telles que le vecteur de Poynting obéisse à la formule (en faisant c = 1) :

$$\text{(I-12)} \qquad \pm\, 2\,\omega\,\mathcal{S}_y = \mathcal{S}_x\,\mathcal{S}_z - \mathcal{S}_z\,\mathcal{S}_x .$$

Nous allons chercher quelle relation lie $\mathcal{S}_y$ à $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathcal{S}}$ dans le cas où l'onde est plane et polarisée elliptiquement.

Calculons $\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{S}} = \frac{1}{4}\,\mathrm{rot}\,(\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{H}}^*)$ + conjugué

on a :

$$4\,\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{S}} = \frac{d\vec{\mathcal{E}}}{d\vec{\mathcal{H}}^*} - \frac{d\vec{\mathcal{H}}^*}{d\vec{\mathcal{E}}} + \text{conjugué} \qquad (\text{car } \mathrm{div}\,\vec{\mathcal{E}} = \mathrm{div}\,\vec{\mathcal{H}} = 0),$$

et les trois composantes s'écrivent :

.../...

$$4\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathcal{J}} \quad \begin{cases} j\,\mathcal{E}_x \mathcal{H}_x^* (K_x^* - K_x) + j\,\mathcal{E}_x \mathcal{H}_z^* (K_z^* - K_z) + \text{conjugué} \\ = j\,(\vec{K}^* - \vec{K}).\vec{\mathcal{H}}^*\,\mathcal{E}_x + \text{conjugué} \\ j\,\mathcal{E}_y \mathcal{H}_y^* (K_x^* - K_x) + j\,\mathcal{E}_y \mathcal{H}_z^* (K_z^* - K_z) + \text{conjugué} \\ = j\,(\vec{K}^* - \vec{K}).\mathcal{H}^*\,\mathcal{E}_y + \text{conjugué} \\ j\,\mathcal{E}_z \mathcal{H}_x^* (K_x^* - K_x) + j\,\mathcal{E}_z \mathcal{H}_z^* (K_z^* - K_z) + \text{conjugué} \\ = j\,(\vec{K}^* - \vec{K})\overrightarrow{\mathcal{H}}^*\,\mathcal{E}_z + \text{conjugué} \end{cases}$$

ce qui donne :

$$4\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathcal{J}} = j\,\left[(\vec{K}^* - \vec{K}).\vec{\mathcal{H}}^*\right]\vec{\mathcal{E}} + \text{conjugué}$$

mais $\vec{K}^* . \vec{\mathcal{H}}^* = 0$ (car div $\vec{\mathcal{H}} = 0$) et en remplaçant $\vec{\mathcal{H}}^*$ en fonction de $\vec{\mathcal{E}}^*$ on obtient :

$$\text{(I-13)} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathcal{J}} = \frac{j}{4\,\mu\,\omega}\left[(\vec{K}^* \wedge \vec{K})\,\vec{\mathcal{E}}^*\right]\vec{\mathcal{E}} + \text{conjugué.}$$

Cette relation s'écrit encore :

$$4\,\mu\,\omega\;\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathcal{J}} = -\,k_0\,k_1\,\sin\theta\;\left(\mathcal{E}_\perp^*\,\vec{\mathcal{E}} + \mathcal{E}_\perp\,\vec{\mathcal{E}}^*\right)$$

(avec la précédente notation $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_\perp$).

.../...

En comparant les composantes de $\overrightarrow{\text{rot}\,\mathcal{J}}$ et de $\vec{\mathcal{J}}$ suivant Oy nous obtenons :

$$4\,\mathcal{J}_y = 4\,\mathcal{J}_\perp = -\,j\,\frac{k^*\,\mathcal{E}_{/\!/}\,\mathcal{E}^*_\perp - k\,\mathcal{E}^*_{/\!/}\,\mathcal{E}_\perp}{k\,k^*\,\mathcal{E}^*_\perp\,\mathcal{E}_\perp}\,(\text{rot}\,\vec{\mathcal{J}})_z\ ,$$

qui s'écrit encore :

$$4\,k\,k^*\,\mathcal{J}_y = -\,j\,\left(k^*\,\frac{\mathcal{E}_{/\!/}}{\mathcal{E}_\perp} - k\,\frac{\mathcal{E}^*_{/\!/}}{\mathcal{E}^*_\perp}\right)(\partial_z\,\mathcal{J}_x - \partial_x\,\mathcal{J}_z)\ ,$$

avec

$$\mathcal{E}_{/\!/} = E_{/\!/}\ e^{j\omega t}\ e^{-j\vec{K}\vec{r}}\ ,$$

$$\mathcal{E}_\perp = E_\perp\ e^{j\omega t}\ e^{-j\vec{K}\vec{r}}\ ,$$

d'où finalement :

(I-14)
$$\boxed{4\,k\,k^*\,\mathcal{J}_y = -\,j\,\left(k^*\,\frac{E_{/\!/}}{E_\perp} - k\,\frac{E^*_{/\!/}}{E^*_\perp}\right)(\partial_z\,\mathcal{J}_x - \partial_x\,\mathcal{J}_z).}$$

Si l'onde est polarisée elliptiquement avec un axe suivant Oy nous avons $E_{/\!/}$ réel et $E_\perp$ imaginaire pur, ceci revient à poser (en tenant compte des deux sens possibles de la polarisation) :

$$E_{/\!/} = e_{/\!/} \quad \text{et} \quad E_\perp = \pm\,j\,e_\perp \quad \text{avec } e_{/\!/} \text{ et } e_\perp \text{ réels.}$$

Alors (I-12) s'écrit :

$$4\,\frac{k\,k^*}{k + k^*}\,\mathcal{J}_y = \mp\,\frac{e_{/\!/}}{e_\perp}\,(\partial_z\,\mathcal{J}_x - \partial_x\,\mathcal{J}_z).$$

.../...

Si l'onde est polarisée circulairement $e_{\parallel} = e_{\perp}$ et cette relation devient :

$$4 \frac{k\,k^*}{k + k^*} \mathcal{S}_y = \mp (\partial_z \mathcal{S}_x - \partial_x \mathcal{S}_z).$$

Si k est réel ($\vec{k}_1$ et $\vec{k}_0$ orthogonaux) on a :

$$\text{(I-15)} \qquad 2\,k\,\mathcal{S}_y = \mp (\partial_z \mathcal{S}_x - \partial_x \mathcal{S}_z),$$

et l'on retrouve bien la relation (I-10) qui traduit l'effet inertial de spin du photon.

I-5. Etude des divers cas possibles.

Nous allons discuter l'existence de $\mathcal{S}_{2\perp}$ suivant que k et $\vec{u}$ sont réels ou complexes. Nous aurons toujours les relations :

$$\vec{K} = k\,\vec{u} \qquad \text{et} \qquad \vec{K}^2 = k^2 = k_0^2 - k_1^2 + 2\,j\,\vec{k}_0 \cdot \vec{k}_1 .$$

- Cas où $\vec{u}$ est réel.

Si k est réel alors K^2 l'est aussi et $\vec{k}_0 \cdot \vec{k}_1 = 0$

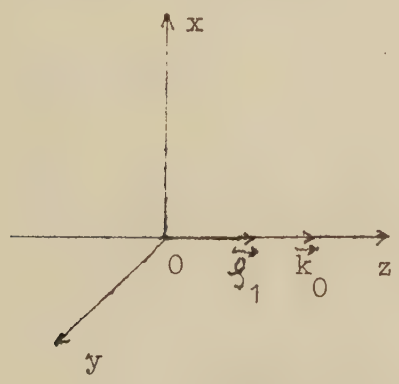


Fig. 1-3.

$\vec{u}$ étant réel $k_1 = 0$ (fig. 1-3)

alors :

$\vec{\mathcal{S}}_{2\perp} = \vec{\mathcal{S}}_{2\parallel} = 0$;

$\vec{\mathcal{S}}_1 \neq 0$.

.../...

Si k est complexe, $\vec{k}_0$ et $\vec{k}_1$ sont colinéaires. (fig. I-4)

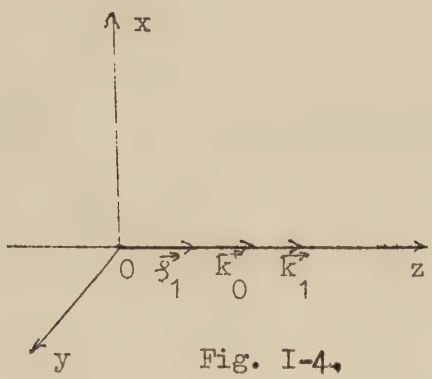


Fig. I-4.

donc :

$\vec{\mathcal{E}}_{2\perp} = \vec{\mathcal{E}}_{2\parallel} = 0$;

$\vec{\mathcal{E}}_1 \neq 0$.

- Cas où $\vec{u}$ est complexe.

Si k est complexe on a alors la situation générale représentée par la figure I-2.

Si k est réel, $\vec{u}$ étant complexe, $\vec{K}$ sera complexe.

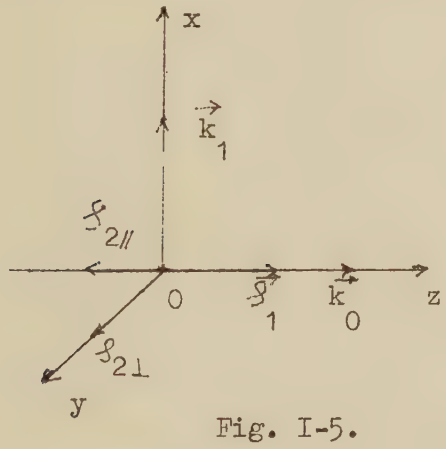


Fig. I-5.

$\vec{k}_1$ existe et est perpendiculaire à $\vec{k}_0$ (fig. I-5), donc :

$\vec{\mathcal{E}}_{2\parallel}$ est colinéaire à $\vec{k}_0$ donc à $\vec{\mathcal{E}}_1$;

$\vec{\mathcal{E}}_{2\perp} \neq 0$;

$\vec{\mathcal{E}}_1 \neq 0$.

- Conclusion.

Cette étude montre que $\vec{\mathcal{E}}_{2\perp}$ sera différent de zéro si les conditions suivantes sont remplies :

- $\vec{u}$ est complexe,
- $\vec{k}_0 \wedge \vec{k}_1$ est différent de zéro,
- l'onde n'est pas polarisée rectilignement parallèlement ou perpendiculairement au plan $\vec{k}_0$, $\vec{k}_1$ (car il faut que $k^* \mathcal{E}_{\parallel} \mathcal{E}_{\perp}^* - k \mathcal{E}_{\parallel}^* \mathcal{E}_{\perp} \neq 0$ dans l'expression I-8).

.../...

Les ondes qui remplissent ces conditions sont d'une part celles en propagation dans un milieu absorbant ($^{22}_{\text{"}}$) ($^{23}_{\text{"}}$) (situation représentée sur la figure I-2) et les ondes évanescentes (cas de la figure I-5). Nous allons étudier en détail les ondes transmises par un dioptre plan, ondes qui, comme nous le verrons, satisfont aux conditions précédentes et sont telles que $\vec{\mathcal{S}}_{2\perp} \neq 0$.

.../...

- Chapitre II -

ETUDE DU VECTEUR DE POYNTING RELATIF AUX ONDES TRANSMISES PAR UN DIOPTRE PLAN : EXISTENCE D'UNE COMPOSANTE PERPENDICULAIRE AU PLAN D'INCIDENCE.

Pour obtenir des ondes évanescentes, ou en propagation dans un milieu absorbant, nous allons utiliser un dioptre plan séparant deux milieux homogènes et isotropes. L'onde transmise, dans le cas où le second milieu est absorbant, sera du type de celle représentée sur la figure I-2. Dans le cas où les deux milieux sont transparents, si le second est moins réfringent que le premier, il peut y avoir réflexion totale et il existe alors une onde de surface ayant la structure représentée sur la figure I-5. Dans ces deux cas, si les ondes sont polarisées convenablement, la densité de courant d'énergie ($\vec{\mathcal{J}}$) ne sera pas colinéaire au vecteur d'onde (donc à l'impulsion des photons définie par l'opérateur $i\hbar\,\overrightarrow{\text{grad}}$) car $\vec{\mathcal{J}}_{2\perp} \neq 0$.

Nous allons dans cette seconde partie donner les expressions des champs et des vecteurs de Poynting dans les deux milieux, le second étant supposé absorbant, pour une onde incidente de polarisation quelconque. Après avoir vérifié que $\vec{\mathcal{J}}_{2\perp}$ satisfait les propriétés énoncées dans la première partie nous discuterons les résultats obtenus.

.../...

II-1. Expressions des champs dans les deux milieux.

Chaque milieu sera caractérisé par son admittance complexe Y, qui est liée à la permittivité complexe ε et à la perméabilité complexe μ par :

$$Y^2 = \frac{\varepsilon}{\mu}$$

Si c est la vitesse de la lumière dans le vide, l'indice complexe sera $n = \mu\, c\, Y$.

Nous choisissons un trièdre de référence Oxyz. Le dioptre est défini par le plan z = 0 et le plan d'incidence par y = 0.

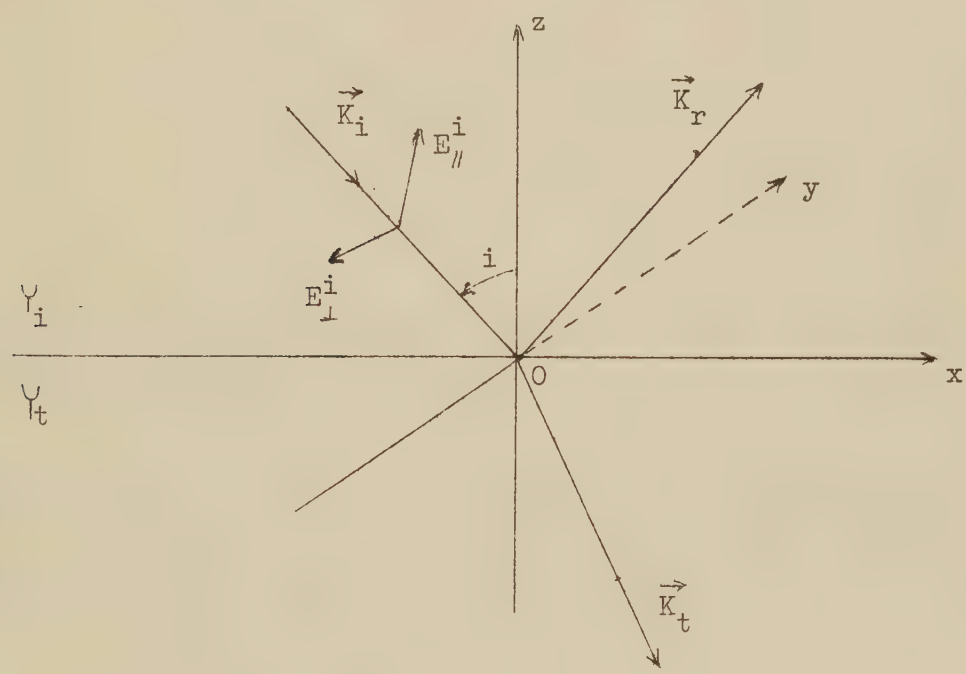


Fig. II-1.

.../...

Les paramètres du premier milieu ($z > 0$) seront écrits avec l'indice i, ceux du second milieu avec l'indice t. Ainsi les champs incidents, réfléchis et transmis seront notés respectivement : $\vec{\mathcal{E}}^i$, $\vec{\mathcal{E}}^r$, $\vec{\mathcal{E}}^t$. Le champ résultant dans le premier milieu sera : $\vec{\mathcal{E}}^{ir} = \vec{\mathcal{E}}^i + \vec{\mathcal{E}}^r$.

On aura en conservant les notations définies en I :

$$\vec{\mathcal{E}}^i = \vec{E}^i \; e^{-j(k_i \vec{u}_i . \vec{r} - \omega t)} \equiv \vec{E}^i \; P^i$$

avec $\vec{u}_i = (\alpha_i, 0, -\gamma_i)$,

$$\vec{\mathcal{E}}^r = \vec{E}^r \; e^{-j(k_i \vec{u}_r . \vec{r} - \omega t)} \equiv \vec{E}^r \; P^r$$

avec $\vec{u}_r = (\alpha_i, 0, -\gamma_i)$,

$$\vec{\mathcal{E}}^t = \vec{E}^t \; e^{-j(k_i \vec{u}_t . \vec{r} - \omega t)} \equiv \vec{E}^t \; P^t$$

avec $\vec{u}_t = (\alpha_t, 0, \gamma_t)$.

On décompose $\vec{E}^i$ en deux vecteurs, notés $\vec{E}_{/\!/}$ et $\vec{E}_{\perp}$, respectivement parallèle et perpendiculaire au plan d'incidence.

En appelant $r_{/\!/}$, $\tau_{/\!/}$; $r_{\perp}$, $\tau_{\perp}$; les facteurs de réflexion et de transmission complexes relatifs aux ondes respectivement polarisées parallèlement et perpendiculairement au plan d'incidence, on a :

$$\vec{E}^i = \vec{E}^i_{/\!/} + \vec{E}^i_{\perp} ,$$
$$\vec{E}^r = r_{/\!/} \vec{E}^i_{/\!/} + r_{\perp} \vec{E}^i_{\perp} ,$$
$$\vec{E}^t = \tau_{/\!/} \vec{E}^i_{/\!/} + \tau_{\perp} \vec{E}^i_{\perp} .$$

.../...

Comme pour une onde plane $\vec{K} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$ (car div $\vec{\mathcal{E}} = 0$) et $\vec{H} = \Psi \vec{u} \wedge \vec{E}$, on obtient :

$$
(\text{II-1}) \left\{
\begin{array}{ll}
\vec{E}^i(\gamma_i E^i_{/\!/}, E^i_{\perp}, -\alpha_i E^i_{/\!/}), & \vec{H}^i(-\Psi_i \gamma_i E^i_{\perp}, \Psi_i E^i_{/\!/}, \Psi_i \alpha_i E^i_{\perp}), \\
\vec{E}^r(-\gamma_i r_{/\!/} E^i_{/\!/}, r_{\perp} E^i_{\perp}, -\alpha_i r_{/\!/} E^i_{/\!/}), & \vec{H}^r(\Psi_i \gamma_i r_{\perp} E^i_{\perp}, \Psi_i r_{/\!/} E^i_{/\!/}, \Psi_i \alpha_i r_{\perp} E^i_{\perp}), \\
\vec{E}^t(\gamma_t \tau_{/\!/} E^i_{/\!/}, \tau_{\perp} E^i_{\perp}, -\alpha_t \tau_{/\!/} E^i_{/\!/}), & \vec{H}^t(-\Psi_t \gamma_t \tau_{\perp} E^i_{\perp}, \Psi_t \tau_{/\!/} E^i_{/\!/}, \Psi_t \tau_{\perp} E^i_{\perp} \alpha_t).
\end{array}
\right.
$$

En écrivant les conditions de continuité des inductions et des champs on obtient :

$$
(\text{II-2}) \left\{
\begin{array}{ll}
\tau_{/\!/} = \dfrac{2\,\Psi_i\,\gamma_i}{\Psi_t \gamma_i + \Psi_i \gamma_t}, & \tau_{\perp} = \dfrac{2\,\Psi_i\,\gamma_i}{\Psi_i \gamma_i + \Psi_t \gamma_t}, \\[2ex]
r_{/\!/} = \dfrac{\Psi_t \gamma_i - \Psi_i \gamma_t}{\Psi_t \gamma_i + \Psi_i \gamma_t}, & r_{\perp} = \dfrac{\Psi_i \gamma_i - \Psi_t \gamma_t}{\Psi_i \gamma_i + \Psi_t \gamma_t}.
\end{array}
\right.
$$

On passe de α_i à α_t par la relation : $k_i\,\alpha_i = k_t\,\alpha_t$.

II-2. Expressions des vecteurs de Poynting dans les deux milieux.

Nous allons calculer les vecteurs de Poynting relatifs aux ondes incidente, réfléchie, transmise et celui correspondant au champ $\vec{\mathcal{E}}^{ir}$ régnant dans le premier milieu. Pour simplifier nous limiterons notre étude au cas où le premier milieu n'est pas absorbant (Ψ_i réel). D'autre part nous supposerons que $\vec{u}_i$ est un vecteur réel et que $\mu_i = \mu_t$ ce qui est pratiquement le cas de la plupart des milieux optiques. Ainsi $\vec{K}_i = k_i\,\vec{u}_i$ est un vecteur réel.

.../...

A l'onde incidente $\vec{\mathcal{E}}^i$ correspond le vecteur de Poynting $\vec{\mathcal{S}}^i$:

$$\text{(II-3)} \quad \vec{\mathcal{S}}^i = \frac{1}{2}\, Y_i (E^i_{/\!/}\, E^{i*}_{/\!/} + E^i_{\perp}\, E^{i*}_{\perp})\, \vec{u}_i .$$

A l'onde réfléchie $\vec{\mathcal{E}}^r$ correspond $\vec{\mathcal{S}}^r$:

$$\text{(II-4)} \quad \vec{\mathcal{S}}^r = \frac{1}{2}\, Y_i (E^i_{/\!/}\, E^{i*}_{/\!/}\, r_{/\!/}\, r^*_{/\!/} + r_{\perp}\, r^*_{\perp}\, E^i_{\perp}\, E^{i*}_{\perp})\, \vec{u}_r .$$

Dans le premier milieu règne un champ $\vec{\mathcal{E}}^{ir} = \vec{\mathcal{E}}^i + \vec{\mathcal{E}}^r$ auquel correspond le vecteur de Poynting $\vec{\mathcal{S}}^{ir}$:

$$4\, \vec{\mathcal{S}}^{ir} = (\vec{\mathcal{E}}^i + \vec{\mathcal{E}}^r) \wedge (\vec{\mathcal{H}}^{i*} + \vec{\mathcal{H}}^{r*}) + \text{conjugué}$$

$$= (P^i\, \vec{E}^i + P^r\, \vec{E}^r) \wedge (P^{i*}\, \vec{H}^{i*} + P^{r*}\, \vec{H}^{r*}) + \text{conjugué},$$

soit en développant :

$$4\, \vec{\mathcal{S}}^{ir} = 4\, \vec{\mathcal{S}}^i + 4\, \vec{\mathcal{S}}^r + (P^i\, P^{r*}\, \vec{E}^i \wedge \vec{H}^{r*} + P^r\, P^{i*}\, \vec{E}^r \wedge \vec{H}^{i*} + \text{conjugué}) .$$

En posant $N = P^i\, P^{r*} = e^{-j(\vec{K}_i - \vec{K}^*_r)\,\vec{r}}$ on obtient :

$$\text{(II-5)} \quad \vec{\mathcal{S}}^{ir} = \frac{Y_i}{2} \times \begin{cases} \alpha_i \left[E^i_{\perp}\, E^{i*}_{\perp} (1 + r_{\perp}\, r^*_{\perp} + N^*\, r_{\perp} + N r^*_{\perp}) + E^i_{/\!/} E^{i*}_{/\!/} (1 + r_{/\!/}\, r^*_{/\!/} + N^*\, r_{/\!/} + N\, r^*_{/\!/}) \right] \\ \alpha_i\, \gamma_i \left[E^i_{/\!/}\, E^{i*}_{\perp}\, (N^*\, r_{/\!/} - N\, r^*_{\perp}) + \text{conjugué} \right] \\ \gamma_i \left[E^i_{\perp}\, E^{i*}_{\perp} (1 - r_{\perp}\, r^*_{\perp}) + E^i_{/\!/}\, E^{i*}_{/\!/}\, (1 - r_{/\!/}\, r^*_{/\!/}) \right] \end{cases}$$

.../...

A l'onde transmise $\vec{\mathcal{E}}^t$ correspond le vecteur de Poynting $\vec{\mathcal{S}}^t$:

$$(\text{II-6})\quad \vec{\mathcal{S}}^t = \frac{P^t P^{t*}}{4} \begin{cases} \tau_\perp \tau_\perp E^i_\perp E^{i*}_\perp (\psi^*_t \alpha^*_t + \psi_t \alpha_t) + \tau_\parallel \tau^*_\parallel E^i_\parallel E^{i*}_\parallel (\psi^*_t \alpha_t + \psi_t \alpha^*_t) \\ (\gamma_t \alpha^* - \gamma^*_t \alpha_t)(\psi_t \tau_\perp \tau^*_\parallel E^i_\perp E^{i*}_\parallel - \psi^*_t \tau^*_\perp \tau_\parallel E^{i*}_\perp E^i_\parallel) \\ \tau_\perp \tau^*_\perp E^i_\perp E^{i*}_\perp (\psi^*_t \gamma^*_t + \psi_t \gamma_t) + \tau_\parallel \tau^*_\parallel E^i_\parallel E^{i*}_\parallel (\psi^*_t \gamma_t + \psi_t \gamma^*_t) \end{cases}$$

avec $P^t = e^{-j\vec{K}_t \vec{r}} e^{j\omega t}$, donc $P^t P^{t*} = e^{-j(\vec{K}_t - \vec{K}^*_t)\vec{r}}$.

II-3. $\mathcal{S}_y$ est la composante d'un rotationnel.

Nous avons montré que dans le cas d'une onde plane inhomogène $\mathcal{S}_y$ satisfait la relation I-11 :

$$\mathcal{S}_y = -\frac{1}{4\mu\omega}\left[\text{rot}\, \vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{E}}\right]_y .$$

Nous allons d'une part vérifier qu'il en est bien ainsi pour $\mathcal{S}^t_y$, et d'autre part nous allons montrer que $\mathcal{S}^{ir}_y$ satisfait aussi cette relation bien que le champ $\vec{\mathcal{E}}^{ir}$ ne corresponde pas à une onde plane inhomogène ($^{21}_{\parallel}$).

Dans le milieu 2 nous avons :

$$(\text{II-7})\quad \vec{\mathcal{E}}^t \wedge \vec{\mathcal{E}}^{t*} = P^t P^{t*} \times \begin{cases} \tau_\parallel \tau^*_\perp E^i_\parallel E^{i*}_\perp \alpha_t - \text{conjugué} \\ \tau_\parallel \tau^*_\parallel E^i_\parallel E^{i*}_\parallel (\gamma_t \alpha^*_t - \gamma^*_t \alpha_t) \\ \tau_\parallel \tau^*_\perp E^i_\parallel E^{i*}_\perp \gamma_t - \text{conjugué} \end{cases}$$

.../...

d'où

$$\text{(II-8)} \qquad \frac{j}{4\,\mu\,\omega}\,\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{E}}^{t} \wedge \vec{\mathcal{E}}^{t*} = \frac{1}{4}\,P^{t}\,P^{t*}(\alpha_t\,\gamma_t^* - \alpha_t^*\,\gamma_t)$$

$$\times \begin{cases} \tau_{/\!/}\tau_{/\!/}^* E_{/\!/}^{i}\,E_{/\!/}^{i*}\,(\gamma_t\,\Upsilon_t - \gamma_t^*\,\Upsilon_t^*) \\ \tau_{/\!/}^*\tau_{\perp}\,\Upsilon_t\,E_{/\!/}^{i*}\,E_{\perp}^{i} - \tau_{\perp}^*\,\tau_{/\!/}\,\Upsilon_t^*\,E_{/\!/}^{i}\,E_{/\!/}^{i*} \\ \tau_{/\!/}\tau_{/\!/}^* E_{/\!/}^{i}\,E_{/\!/}^{i*}\,(\Upsilon_t^*\,\alpha_t^* - \Upsilon_t\,\alpha_t) = 0 \end{cases}$$

En comparant II-8 à II-6 on vérifie I-11.

De même dans le milieu 1 nous avons :

$$\text{(II-9)} \qquad \vec{\mathcal{E}}^{ir} \wedge \vec{\mathcal{E}}^{ir*} = \begin{cases} \alpha_i\left[E_{/\!/}^{i}\,E_{\perp}^{i*}\,(1 + r_{/\!/}\,r_{\perp}^* + N\,r_{\perp}^* + N^*\,r_{/\!/}) - \text{conjugué}\right] \\ 2\,\alpha_i\,\gamma_i\,E_{/\!/}^{i}\,E_{/\!/}^{i*}\,N\,r_{/\!/}^* - \text{conjugué} \\ \gamma_i\left[E_{/\!/}^{i}\,E_{\perp}^{i*}\,(1 - r_{/\!/}\,r_{\perp}^* + N\,r_{\perp}^* - N^*\,r_{/\!/}) - \text{conjugué}\right] \end{cases}$$

d'où

$$\text{(II-10)} \quad \frac{j}{4\,\mu\,\omega}\,\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{E}}^{ir} \wedge \vec{\mathcal{E}}^{ir*} \begin{cases} -\Upsilon_i\,\gamma_i^2\,\alpha_i\,E_{/\!/}\,E_{/\!/}^*\,(N\,r_{/\!/}^* + N^*\,r_{/\!/}) \\ -\frac{1}{2}\,\Upsilon_i\,\alpha_i\,\gamma_i\left[E_{/\!/}^{i}\,E_{\perp}^{i*}(N^*r_{/\!/} - N\,r_{\perp}^*) + E_{/\!/}^{i*}E_{\perp}^{i}(Nr_{/\!/}^* - N^*r_{\perp})\right] \\ 0 \end{cases}$$

En comparant II-10 à II-5 on vérifie que la relation I-11 est satisfaite.

.../...

II-4. Discussion des résultats.

Les relations II-5 montrent que dans la zone d'interférence de l'onde incidente et de l'onde réfléchie il existe une composante du vecteur de Poynting perpendiculaire au plan d'incidence à condition d'avoir $E^i_{\parallel}$ et $E^i_{\perp}$ différents de zéro. On peut d'ailleurs montrer que cette propriété est générale c'est-à-dire que dans la zone d'interférence de n ondes planes de vecteurs d'onde coplanaires (plan y = 0), $\mathcal{S}_y$ est différent de zéro ([24]).

Les relations II-6 montrent qu'il existe un flux d'énergie non nul perpendiculairement au plan d'incidence dans le second milieu si α_t ou γ_t sont complexes et si l'onde incidente n'est pas une vibration polarisée rectilignement perpendiculairement ou parallèlement au plan d'incidence. Nous voyons donc que $\mathcal{S}_y$ existe dans les deux milieux où cependant la situation n'est pas exactement la même. En effet, dans le milieu 1, $\mathcal{S}^{ir}_y$ oscille sinusoïdalement et prend spatialement des valeurs positives et négatives ; le flux à travers un demi-plan y = Cte s'étendant de z = + 0 à z = + ∞ est donc tel que :

$$\Phi_{+0}^{+\infty} = \iint_{\substack{\frac{1}{2}\text{ plan } y = \text{Cte} \\ z \geqslant 0}} \mathcal{S}^{ir}_y \, dx\, dz = 0 \quad ;$$

car la valeur de cette intégrale ne tend pas vers une limite finie lorsque la borne supérieure z tend vers + ∞ ; mais la moyenne de ses valeurs possibles est nulle. Elle est donc nulle au sens des intégrales de Fourier.

Par contre dans le second milieu, l'onde étant atténuée exponentiellement, l'intégrale représentant le flux d'énergie traversant le même plan mais s'étendant de z = - 0 à z = - ∞ est telle que :

$$\Phi_{-0}^{-\infty} = \iint_{\substack{\frac{1}{2}\text{ plan } y = \text{Cte} \\ z < 0}} \mathcal{S}^{t}_y \, dx\, dz \neq 0$$

.../...

et le flux d'énergie traversant ce demi-plan n'est pas nul. C'est donc l'étude de cette onde transmise que nous développerons particulièrement afin de rechercher la signification du flux d'énergie correspondant.

Notons, par ailleurs, que $\mathcal{S}_y$ subit pour z = 0 une discontinuité qui est une simple fonction échelon, donc $\iint_{z=-\varepsilon}^{z=+\varepsilon} \mathcal{S}_y \, dx \, dz$ tend vers zéro avec ε donc :

$$\Phi_{-\infty}^{+\infty} = \iint_{\text{plan entier } y = \text{Cte}} \mathcal{S}_y \, dx \, dz \neq 0 .$$

II-5. Obliquité du rayon transmis par le dioptre plan quand le second milieu est absorbant.

L'existence de $\mathcal{S}_y^t$ perpendiculaire au plan d'incidence (y = 0) dans le second milieu laisse prévoir un rayon (trajectoire de l'énergie) situé hors de ce plan (22) (23). Soit v l'angle du rayon et du plan y = 0. On a :

$$\text{(II-11)} \qquad \operatorname{tg} v = \frac{\mathcal{S}_y^t}{(\mathcal{S}_x^{t\,2} + \mathcal{S}_z^{t\,2})^{1/2}} .$$

Les relations II-6 donnant les composantes de $\vec{\mathcal{S}}^t$ montrent que tg v prend une valeur maximale lorsque l'onde dans le second milieu est polarisée circulairement.

Comparons la valeur de tg v dans ce cas à celle obtenue lorsque l'onde est polarisée rectilignement à 45° du plan d'incidence.

.../...

Pour l'onde polarisée circulairement on a :

(on fait $E^t_{/\!/} = 1$, $E^t_{\perp} = j$)

$$(\vec{\mathcal{S}}^t)_c = \frac{P^t\, P^{t*}}{4} \left\{ \begin{array}{l} (\Upsilon^*_t + \Upsilon_t)\,(\alpha_t + \alpha^*_t) \\ j(\Upsilon^*_t + \Upsilon_t)\,(\gamma_t\, \alpha^*_t - \gamma^*_t\, \alpha_t) \\ (\Upsilon^*_t + \Upsilon_t)\,(\gamma_t + \gamma^*_t) \end{array} \right.$$

d'où

$$\text{(II-12)} \qquad (\mathrm{tg}\ v)_c = \frac{j}{\sqrt{2}}\ \frac{\gamma_t\, \alpha^*_t - \gamma^*_t\, \alpha_t}{(1 + \alpha_t\, \alpha^*_t + \gamma_t\, \gamma^*_t)^{1/2}}\ .$$

Pour l'onde polarisée rectilignement à 45° du plan d'incidence on a :

$$(\vec{\mathcal{S}}^t)_R = \frac{P^t\, P^{t*}}{4} \left\{ \begin{array}{l} (\Upsilon^*_t + \Upsilon_t)\,(\alpha_t + \alpha^*_t) = (\mathcal{S}^t_x)_c \\ (\Upsilon^*_t - \Upsilon_t)\,(\gamma_t\, \alpha^*_t - \gamma^*_t\, \alpha_t) \\ (\Upsilon^*_t + \Upsilon_t)\,(\gamma_t + \gamma^*_t) = (\mathcal{S}^t_z)_c \end{array} \right.$$

d'où

$$\text{(II-13)} \qquad (\mathrm{tg}\ v)_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\Upsilon^*_t - \Upsilon_t}{\Upsilon^*_t + \Upsilon_t} \cdot \frac{\gamma_t\, \alpha^*_t - \gamma^*_t\, \alpha_t}{(1 + \alpha_t\, \alpha^*_t + \gamma_t\, \gamma^*_t)^{1/2}}\ .$$

.../...

La comparaison avec (II-12) donne :

$$(\mathrm{tg}\ v)_c = -\ j\ \frac{\Upsilon_t^* + \Upsilon_t}{\Upsilon_t^* - \Upsilon_t}\ (\mathrm{tg}\ v)_R ,$$

Υ étant lié à l'indice complexe n du milieu par $\Upsilon = \dfrac{n}{\mu\ c}$.

Cette relation devient, en posant $n = \nu - j\,\lambda$,

$$(\mathrm{tg}\ v)_c = \frac{\nu}{\lambda}\ (\mathrm{tg}\ v)_R .$$

Ainsi pour un milieu défini par :

$$\nu = 1{,}5 , \qquad \lambda = 1{,}5 \ .\ 10^{-5} ,$$

ce qui correspond à une atténuation de l'intensité de l'onde de 1000 pour un parcours de 1 cm (densité 3), on trouve une déflexion 10^5 fois plus grande pour l'onde polarisée circulairement. Même dans ce cas, qui est le plus favorable à une vérification expérimentale, l'angle v reste petit. Un calcul simple montre que pour ce même milieu la déviation correspondant à un angle d'incidence de 45° est de l'ordre de $5\ .\ 10^{-6}$ rd, soit environ 1".

J. PAVAGEAU ([22]) pour ce même milieu a trouvé, pour une vibration incidente rectiligne à 45° du plan d'incidence, une déviation d'environ 10^{-10} rd, c'est-à-dire d'environ 10^{+5} fois plus faible. Le gain obtenu en utilisant une polarisation circulaire n'a rien de surprenant ; ainsi J. RICARD ([25]), dans un problème de diffraction, prévoit une déflexion 1000 fois plus importante en polarisation circulaire qu'en rectiligne.

.../...

L'ordre de grandeur de la déviation semble en interdire toute vérification expérimentale, car il faudrait détecter une translation du faisceau de l'ordre de 0,1 μ pour une distance parcourue de 2 cm, distance au bout de laquelle ne subsiste que le millionième de l'énergie incidente.

Un autre cas où $\mathcal{E}_y^t$ existe est celui où l'onde dans le second milieu est évanescente. Nous allons l'étudier en détail, car l'existence de la composante $\mathcal{E}_y$ perpendiculaire au plan d'incidence permet alors de prévoir une translation, perpendiculairement à ce plan, du faisceau totalement réfléchi, translation pouvant être mise en évidence expérimentalement.

.../...

- Chapitre III -

ETUDE DE L'ONDE EVANESCENTE :

PREVISION D'UN DECALAGE PERPENDICULAIRE AU PLAN D'INCIDENCE.

Nous savons que lorsqu'il y a réflexion totale, l'onde dans le second milieu est évanescente. GOOS et HÄNCHEN ont observé dans ce cas un décalage du faisceau réfléchi parallèlement au plan d'incidence. Ainsi (fig. III-1) un faisceau incident tel que a, b, ne se réfléchit pas suivant a" b" mais suivant a' b' ayant subi un décalage L_x. Les expériences ont été faites avec une onde polarisée rectilignement, parallèlement ou perpendiculairement au plan d'incidence. ([26])

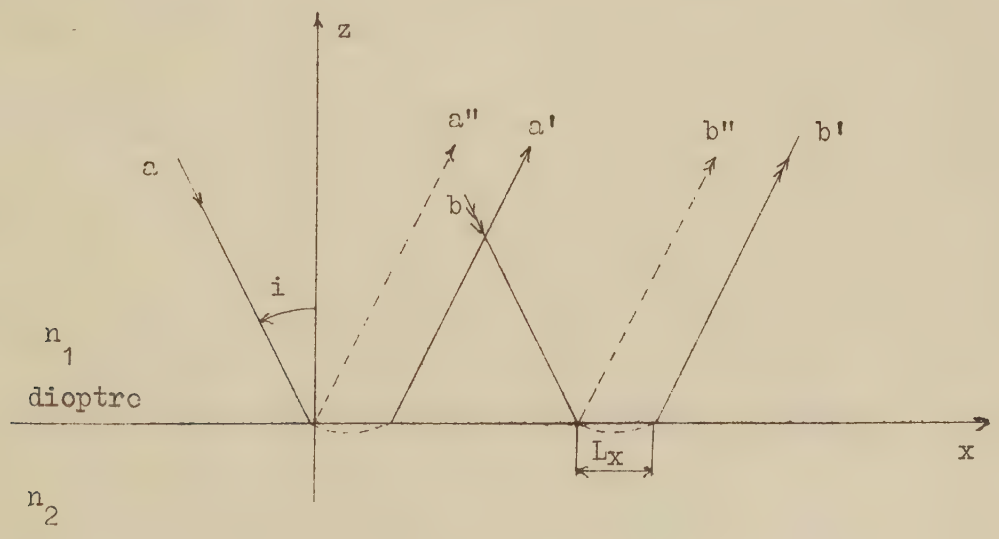


Fig. III-1.

.../...

Une évaluation théorique de ce déplacement peut se faire en raisonnant sur la conservation du flux d'énergie ([27]) ([28]), les valeurs ainsi obtenues sont en bon accord avec l'expérience ainsi qu'avec d'autres explications proposées par divers auteurs ([29] à [31]). Dans le cas où les ondes ne sont pas polarisées rectilignement, perpendiculairement ou parallèlement au plan d'incidence, le vecteur de Poynting relatif à l'onde évanescente n'est plus dans le plan d'incidence $y = 0$ car $\mathcal{S}_y^t \neq 0$ et l'énergie dans le second milieu chemine obliquement par rapport à ce plan ce qui doit ajouter, au décalage longitudinal L_x de GOOS et HÄNCHEN, un décalage latéral L_y.

Nous allons d'une part donner les expressions des divers champs et vecteurs de Poynting dans les deux milieux dans le cas de la réflexion totale, et d'autre part évaluer le décalage L_y que laisse prévoir l'existence de ce flux d'énergie dans la direction Oy ([32]).

III-1. Expressions des champs et du vecteur de Poynting dans les deux milieux.

Nous limiterons notre étude au cas où les milieux ne sont pas absorbants. Leurs admittances Y_i, Y_t et leurs indices n_i et n_t sont réels. L'onde transmise sera évanescente si l'angle d'incidence i est supérieur à l'angle limite i_1 $(n_t < n_i)$.

Cette incidence limite correspond à

$$\alpha_i = \alpha_1 = \frac{k_t}{k_i} = \frac{n_t}{n_i} = \sin i_1 .$$

Il y a réflexion totale lorsque $\alpha_i > \alpha_1$; or $k_i\ \alpha_i = k_t\ \alpha_t$ donc :

$$\text{(III-1)} \qquad \begin{cases} \alpha_t = \dfrac{\alpha_i}{\alpha_1} > 1 \\[2ex] \gamma_t = \dfrac{j}{\alpha_1} \sqrt{\alpha_i^2 - \alpha_1^2} \ . \end{cases}$$

.../...

En portant ces valeurs dans les expressions générales de II on obtient :

$$\vec{\mathcal{E}}^t = (\tau_{/\!/} \vec{E}^i_{/\!/} + \tau_\perp \vec{E}^i_\perp)\, e^{k_i \sqrt{\alpha_i^2 - \alpha_1^2}\, z}\, e^{-j(k_i \alpha_i x - \omega t)}$$

$$\text{(III-2)}\quad \vec{\mathcal{E}}^t \wedge \vec{\mathcal{E}}^{t*} = e^{2k_i \sqrt{\alpha_i^2 - \alpha_1^2}\, z} \times \begin{cases} \dfrac{\alpha_i}{\alpha_1} (\tau_{/\!/} \tau_\perp^* E^i_{/\!/} E^{i*}_\perp - \text{conjugué}) \\[2ex] 2\dfrac{j\,\alpha_i}{\alpha_1^2} \sqrt{\alpha_i^2 - \alpha_1^2}\; \tau_{/\!/} \tau_{/\!/}^* E^i_{/\!/} E^{i*}_{/\!/} \\[2ex] \dfrac{j}{\alpha_1} \sqrt{\alpha_i^2 - \alpha_1^2}\, (\tau_{/\!/} \tau_\perp^* E^i_{/\!/} E^{i*}_\perp + \text{conjugué}) \end{cases}$$

$$\text{(III-3)}\quad \vec{\mathcal{S}}^t = \frac{\Psi_t \cdot \alpha_i}{2\,\alpha_1}\, e^{2k_i \sqrt{\alpha_i^2 - \alpha_1^2}\, z} \times \begin{cases} \tau_\perp \tau_\perp^* E^i E^{i*}_\perp + \tau_{/\!/} \tau_{/\!/}^* E^i_{/\!/} E^{i*}_{/\!/} \\[2ex] -\dfrac{j}{\alpha_1} \sqrt{\alpha_i^2 - \alpha_1^2}\, (\tau_{/\!/} \tau_\perp^* E^i_{/\!/} E^{i*}_\perp - \text{conjugué}) \\[2ex] 0 \end{cases}$$

$\vec{\mathcal{S}}^t$ est de la forme : $\vec{\mathcal{S}}^t = \vec{\Gamma}\, e^{\rho z}$.

$$\text{(III-4)}\quad \vec{\mathcal{S}}^i = \frac{1}{2}\, \Psi_i\, (E^i_{/\!/} E^{i*}_{/\!/} + E^i_\perp E^{i*}_\perp)\, \vec{u}_i .$$

$$\text{(III-5)}\quad \vec{\mathcal{S}}^{ir} = \frac{\Psi_i\, \alpha_i}{2} \times \begin{cases} E^i_\perp E^{i*}_\perp (1 + r_\perp r_\perp^* + N^* r_\perp + N r_\perp^*) + E^i_{/\!/} E^{i*}_{/\!/} (1 + r_{/\!/} r_{/\!/}^* + N^* r_{/\!/} + N r_{/\!/}^*) \\[2ex] E^i_{/\!/} E^{i*}_\perp (N^* r_{/\!/} - N r_\perp^*) + \text{conjugué} \\[2ex] 0 \end{cases}$$

.../...

Les facteurs de réflexion et de transmission deviennent :

$$r_{/\!/} = \frac{\gamma_i\,\alpha_1 - j\sqrt{\alpha_i^2 - \alpha_1^2}}{\gamma_i\,\alpha_1 + j\sqrt{\alpha_i^2 - \alpha_1^2}}\,, \qquad r_{\perp} = \frac{\gamma_i - j\sqrt{\alpha_i^2 - \alpha_1^2}}{\gamma_i + j\sqrt{\alpha_i^2 - \alpha_1^2}}\,;$$

(III-6)

$$\tau_{/\!/} = \frac{2\,\gamma_i\,\alpha_1}{\gamma_i\,\alpha_1^2 + j\sqrt{\alpha_i^2 - \alpha_1^2}}\,, \qquad \tau_{\perp} = \frac{2\,\gamma_i}{\gamma_i + j\sqrt{\alpha_i^2 - \alpha_1^2}}\,.$$

On remarque que :

(III-7) $$r_{/\!/}\,r_{/\!/}^{*} = r_{\perp}\,r_{\perp}^{*} = 1.$$

III-2. Expression du décalage latéral du faisceau réfléchi.

La composante du vecteur de Poynting suivant Oz est nulle sur le dioptre plan (z = 0) que ce soit dans le milieu 1 ou le milieu 2. Puisqu'il existe dans le milieu 2 de l'énergie en propagation et que toute l'énergie contenue dans le faisceau incident se retrouve dans le faisceau réfléchi (relation III-7) on peut admettre qu'il entre autant d'énergie de 1 vers 2 qu'il en ressort de 2 vers 1. Mais $\vec{\mathcal{S}}^t$ existant, cette énergie avant de ressortir s'est propagée dans le milieu 2 parallèlement à $\vec{\mathcal{S}}^t$. Ainsi l'énergie contenue dans le faisceau (aI, bO) (fig. III-2) ressort dans le faisceau (Oa', I'b') et a subi parallèlement à $\vec{\mathcal{S}}^t$ une translation $\vec{IO} = \vec{L}$, bien entendu les rayons Oa' et I'b' ne subissent pas de déviation : ils restent dans un plan parallèle au plan y = 0 (ils ne sont pas dans le plan de la figure).

.../...

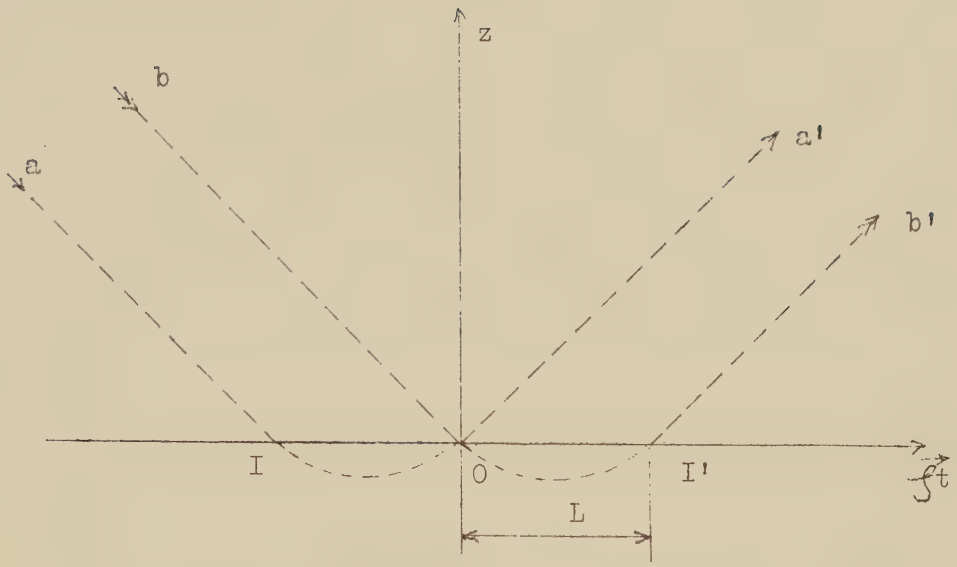


Fig. III-2.

Pour évaluer $|\vec{IO}| = L$ on doit exprimer que le flux d'énergie $\Phi_{(\mathcal{A})}$ de $\vec{\xi}^i$ à travers la surface $\mathcal{A}$ (H H' J J') (fig. III-3) est égal à celui de $\vec{\xi}^t$ à travers le demi-plan (Π), perpendiculaire à $\vec{\xi}^t$, s'étendant de $z = -\infty$ à $z = 0$, de largeur $h = H' J'$.

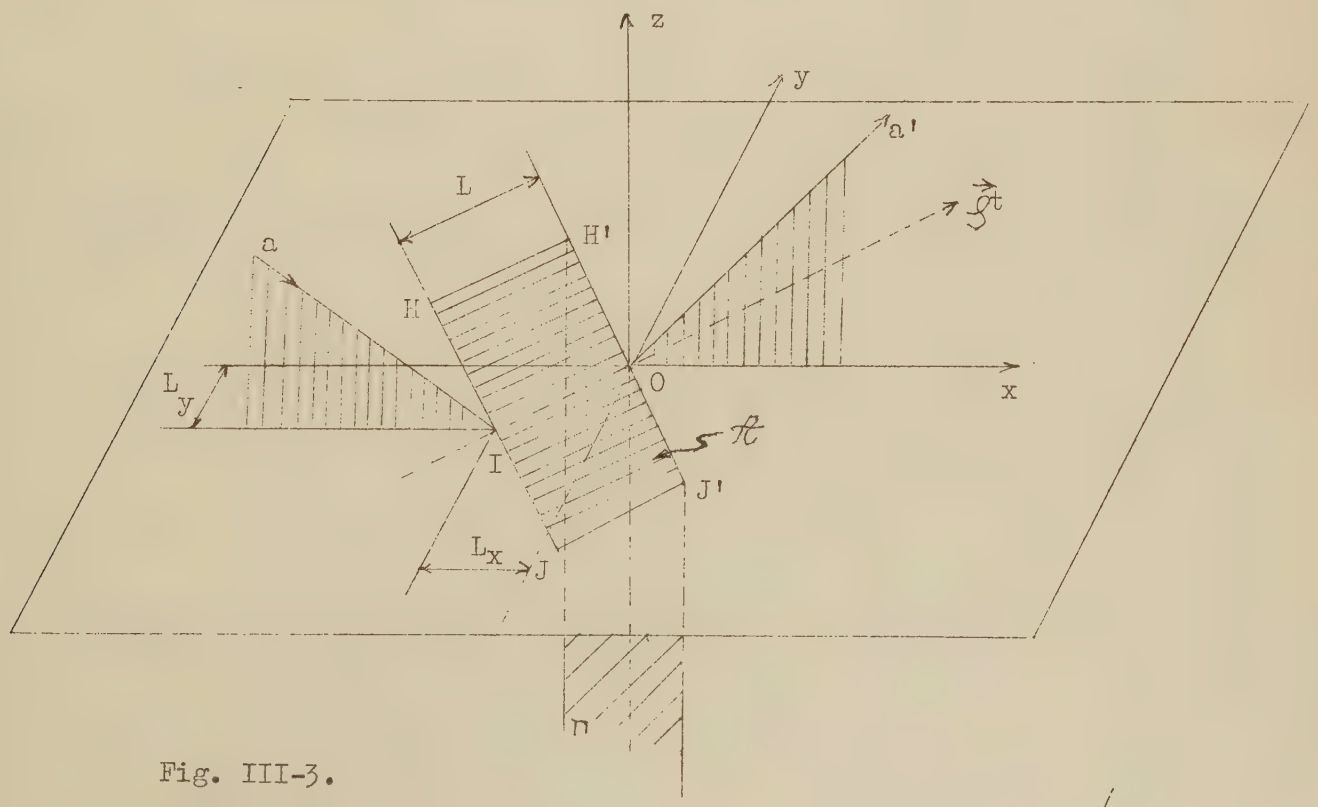


Fig. III-3.

.../...

En appelant $\Phi_{(\pi)}$ ce flux et en prenant $h = 1$ on a :

$$\Phi_{(\mathcal{R})} = L\, \mathcal{S}_z^r , \qquad \Phi_{(\pi)} = \int_{-\infty}^{0} \left| \vec{\mathcal{S}}^t \right| dz ,$$

d'où

$$L = \frac{\Phi_{(\pi)}}{\mathcal{S}_z^r}$$

et en appelant L_x et L_y les projections de L suivant x et y on obtient :

(III-8) $$L_x = \frac{\int_{-\infty}^{0} \mathcal{S}_x^t \, dz}{\mathcal{S}_z^r} \qquad L_y = \frac{\int_{-\infty}^{0} \mathcal{S}_y^t \, dz}{\mathcal{S}_z^r}$$

avec $$\int_{-\infty}^{0} \mathcal{S}_x^t \, dz = \int_{-\infty}^{0} \Gamma_x \, e^{\rho z} \, dz = \frac{\Gamma_x}{\rho} ,$$

et de même $$\int_{-\infty}^{0} \mathcal{S}_y^t \, dz = \frac{\Gamma_y}{\rho} .$$

Remplaçant Γ_x et Γ_y par leurs valeurs tirées de (III-3) et portant dans les expressions (III-8) on a :

(III-9) $$\boxed{L_x = \frac{\alpha_i \left(\tau_\perp \tau_\perp^* E_\perp^i E_\perp^{i*} + \tau_{/\!/} \tau_{/\!/}^* E_{/\!/}^i E_{/\!/}^{i*} \right)}{2 k_i \sqrt{\alpha_i^2 - \alpha_1^2} \sqrt{1 - \alpha_i^2} \left(E_{/\!/}^i E_{/\!/}^{i*} + E_\perp^i E_\perp^{i*} \right)}}$$

(III-10) $$\boxed{L_y = \frac{- j \alpha_i \left(\tau_{/\!/} \tau_\perp^* E_{/\!/}^i E_\perp^{i*} - \tau_{/\!/}^* \tau_\perp E_{/\!/}^{i*} E_\perp^i \right)}{2 k_t \sqrt{1 - \alpha_i^2} \left(E_\perp^i E_\perp^{i*} + E_{/\!/}^i E_{/\!/}^{i*} \right)}}$$

.../...

L'expression (III-10) montre que L_y existe si l'onde incidente n'est pas une vibration rectiligne polarisée parallèlement ou perpendiculairement au plan d'incidence. Dans le cas où $E_{//}$ ou $E_{\perp} = 0$, seul L_x subsiste, ce qui correspond au décalage mis en évidence par GOOS et HANCHEN.

III-3. Remarque sur le calcul du flux dans les deux milieux.

Pour calculer L_y nous avons dû évaluer le flux $\Phi^0_{-\infty}$ de $\mathcal{S}^t_y$ à travers le demi-plan y = Cte, de largeur unité, s'étendant de $z = -\infty$ à $z = 0$ (fig. III-4). Un autre calcul évitant d'exprimer $\vec{\mathcal{S}}^t$ peut être effectué en utilisant la relation (I-11) :

$$\mathcal{S}^t_y = - \frac{j}{4\,\mu\,\omega} (\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{E}}^*)_y$$

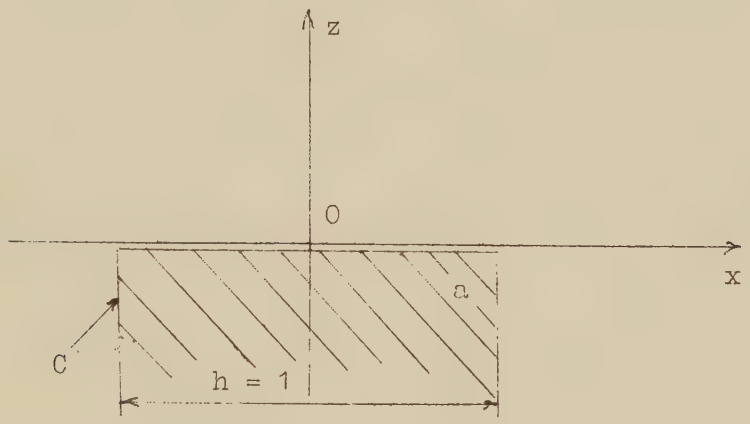


Fig. III-4.

Comme $\dfrac{j}{4\,\mu\,\omega}$ est constant nous pouvons appliquer le théorème de Stokes.

Si C est le contour limitant la surface a nous avons :

$$\Phi^0_{-\infty} = \iint_a \mathcal{S}^t_y \, dx\, dz = - \frac{j}{4\,\mu\,\omega} \iint_a \mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{E}}^t \wedge \vec{\mathcal{E}}^{t*} \, d\vec{a}$$

.../...

$$\Phi^{0}_{-\infty} = -\frac{j}{4\mu\omega} \oint_c \vec{\mathcal{E}}^t \wedge \vec{\mathcal{E}}^{t*} \, \vec{dl}$$

d'où

$$\Phi^{0}_{-\infty} = -\frac{j}{4\mu\omega} (\vec{\mathcal{E}}^t_{z=0} \wedge \vec{\mathcal{E}}^{t*}_{z=0})_x$$

car la contribution des deux segments verticaux est nulle et $(\vec{\mathcal{E}}^t_{z=-\infty} \wedge \vec{\mathcal{E}}^{t*}_{z=-\infty})_x = 0$

En substituant la valeur de $\vec{\mathcal{E}}^t \wedge \vec{\mathcal{E}}^{t*}$ donnée par (III-2) on tire $\Phi^{0}_{-\infty}$.
En divisant par $\mathcal{S}^r_z$ on obtient L_y.

III-4. <u>Application au cas où la vibration incidente est polarisée circulairement.</u>

Nous avons noté que $\vec{\mathcal{S}}^t$ est maximum lorsque l'onde dans le second milieu est polarisée circulairement. Lorsque l'incidence est voisine de l'angle limite cette polarisation est conservée lors de la réflexion totale, situation très favorable à la vérification expérimentale ; aussi allons nous donner les valeurs de L_x et L_y en choisissant une onde incidente polarisée circulairement.

Posant $E^i_{\parallel} = 1$ et $E^i_{\perp} = \pm j$ dans les relations III-9 et III-10 on obtient :

$$L_x^{(c)} = \frac{\lambda_i}{8\pi} \cdot \frac{\alpha_i (\tau_{\parallel} \tau_{\parallel}^* + \tau_{\perp} \tau_{\perp}^*)}{\sqrt{\alpha_i^2 - \alpha_1^2} \sqrt{1 - \alpha_i^2}} = \frac{1}{2} (L_x^{\parallel} + L_x^{\perp}).$$

Nous avons noté le type de polarisation de l'onde incidente en exposant ; ainsi, $L^{\parallel}$ correspond à une vibration rectiligne parallèle au plan d'incidence. λ_i est la longueur d'onde dans le milieu 1.

.../...

Le déplacement transversal devient :

$$L_y^{(c)} = \mp \frac{\lambda_i}{8\pi} \cdot \frac{\alpha_i \left(\tau_{\parallel} \tau_{\perp}^* + \tau_{\parallel}^* \tau_{\perp}\right)}{\alpha_1 \sqrt{1 - \alpha_i^2}}$$

or

$$\tau_{\parallel} \tau_{\parallel}^* + \tau_{\perp} \tau_{\perp}^* = \frac{4\, \alpha_i^2 (1 - \alpha_i^2)(1 + \alpha_1^2)}{\alpha_1^4 (1 - \alpha_i^2) + \alpha_i^2 - \alpha_1^2} ,$$

$$\tau_{\parallel} \tau_{\perp}^* + \tau_{\parallel}^* \tau_{\perp} = \frac{8\, \alpha_1 \alpha_i^2 (1 - \alpha_i^2)}{\alpha_i^2 - \alpha_1^2 + \alpha_1^4 (1 - \alpha_i^2)} ,$$

d'où les nouvelles expressions de $L_x^{(c)}$ et $L_y^{(c)}$:

$$\boxed{L_x^{(c)} = \frac{\lambda_i}{2\pi} \cdot \frac{\alpha_i^3 (1 + \alpha_1^2) \sqrt{1 - \alpha_i^2}}{\sqrt{\alpha_i^2 - \alpha_1^2} \left[\alpha_1^4 (1 - \alpha_i^2) + \alpha_i^2 - \alpha_1^2\right]}}$$

(III-11)

$$\boxed{L_y^{(c)} = \mp \frac{\lambda_i}{\pi} , \frac{\alpha_i^3 \sqrt{1 - \alpha_i^2}}{\alpha_1^4 (1 - \alpha_i^2) + \alpha_i^2 - \alpha_1^2}}$$

Notons que dans ce cas il existe une relation simple entre les divers déplacements :

.../...

$$L_y^{(c)} = \frac{\sqrt{k_i^2 \alpha_i^2 - k_t^2}}{k_t T} L_x^{(c)} \quad \text{et} \quad L_x^{(c)} = \frac{1}{2}\left(L_x^{\parallel} + L_x^{\perp}\right)$$

avec

$$T = \frac{\tau_\perp \tau_\perp^* + \tau_\parallel \tau_\parallel^*}{\tau_\parallel \tau_\perp^* + \tau_\parallel^* \tau_\perp} = \frac{k_i^2 + k_t^2}{2 k_i k_t}$$

Signalons d'autre part que la relation spécifique de l'effet inertial de spin devient dans ce cas :

$$\pm 2 k_t T \mathcal{S}_y = \partial_z \mathcal{S}_x^t .$$

Le décalage $L_y^{(c)}$ prévu par la relation (III-11) est faible, ainsi pour un angle d'incidence supérieur de 30' à l'angle limite, le premier milieu ayant un indice de réfraction de 1,8, on obtient un décalage :

$$L_y^{(c)} = \mp 0{,}46\ \lambda = \mp 0{,}3\ \mu \quad \text{pour} \quad \lambda = 6328\ \text{Å} .$$

III-5. Prévision du décalage transversal utilisant l'isomorphisme entre la statique du fil raide et la dynamique du photon polarisé circulairement ([33]).

Nous avons rappelé, dans l'introduction, la correspondance existant entre la figure d'équilibre prise par un fil raide et la trajectoire de la particule à spin. Cherchons la forme que prendra un fil raide, préalablement courbé lorsqu'on le tord.

Soit $\vec{r}(s)$ le point courant du fil d'abscisse curviligne s, $\vec{T}(s)$ la tension, $\vec{\gamma}(s)$ le couple de raideur, $\vec{f}(s)$ et $\vec{\mu}(s)$ les densités linéaires de force et de couple extérieurement appliquées.

.../...

En l'absence de forces et de couples extérieurs, si $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$, désignent le trièdre de Serret-Frenet, les formules :

(III-12 a et b) $\quad \vec{T} = \text{cte}, \quad \vec{T} \wedge \vec{t} = \dfrac{d\vec{\gamma}}{ds},$

seront celles de la statique du fil raide (donc aussi celles de la trajectoire ordinaire du point à spin). En se plaçant dans le cas particulier où :

(III-13) $\quad \vec{s} = a^{-1}\vec{t} \quad$ avec $a = \text{cte},$

on déduit de (III-12-b) :

(III-14) $\quad \vec{T}.\vec{t} = \alpha = \text{cte}.$

Si $\rho(s)$ désigne la courbure on a : $\dfrac{d\vec{t}}{ds} = \rho\vec{n}$ d'où :

(III-15) $\quad a\vec{T} \wedge \vec{t} = \rho\vec{n},$

ce qui permet d'écrire :

(III-16) $\quad \vec{T} = \alpha\vec{t} + \beta\vec{b}.$

En dérivant cette relation, en tenant compte de la formule $\dfrac{d\vec{b}}{ds} = \theta\vec{n}$, $\theta(s)$ désignant la torsion, on trouve :

$$\beta = \text{cte},$$

puis en dérivant (III-15), compte tenu de (III-12-a), de (III-14) et de la formule $\dfrac{d\vec{n}}{ds} = -\rho\vec{t} - \theta\vec{b}$, on a :

$$\rho = a\beta = \text{cte}, \qquad \theta = -a\alpha = \text{cte}.$$

Ces relations montrent que la trajectoire $\vec{r}(s)$ est une hélice (ou une droite si $\beta = 0$ ou un cercle si $\alpha = 0$).

.../...

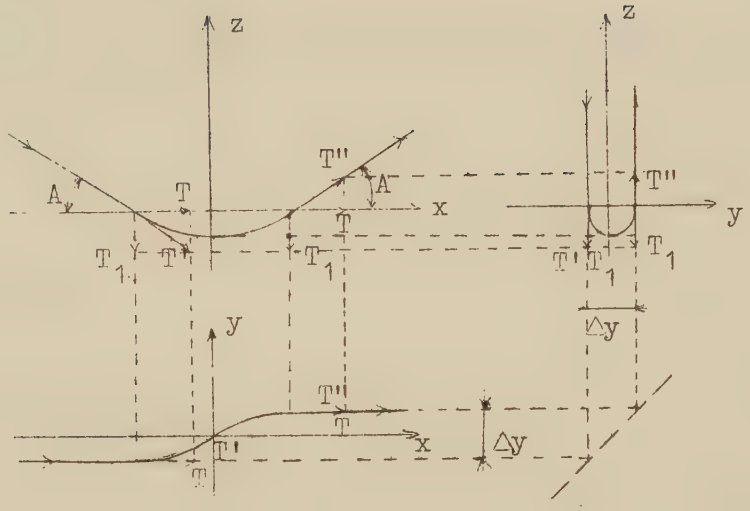


Fig. III-5.

Il apparaît donc un décalage latéral Δy, (fig. III-5) lorsqu'on courbe un fil tordu. En faisant jouer l'isomorphisme nous voyons qu'il en sera de même pour la trajectoire d'un photon subissant une réflexion totale qui conserve son état pur d'hélicité. Notant $\hat{A}$, l'angle de l'hélice avec son axe, on a figuré en T_1 (0, 0, -T tg$\hat{A}$) les forces concentrées dont la présence est nécessaire à la statique du fil. T' et T" désignent les tensions le long des branches rectilignes. En dynamique du photon, 2 T_1 est l'impulsion communiquée au dioptre par la réflexion du photon, T' et T" étant les impulsions initiale et finale.

- Chapitre IV -

VERIFICATION EXPERIMENTALE DE L'EFFET INERTIAL DE SPIN DU PHOTON. ([34] " à [36] ")

IV-1. Principe de l'expérience.

Pour mettre en évidence le décalage L_y perpendiculaire au plan d'incidence nous avons utilisé le principe suivant : considérons un objet CAB (fig. IV-1) éclairé par un faisceau polarisé circulairement définissant un plan d'incidence contenant CAB. A la réflexion totale un tel faisceau va subir d'une part le décalage longitudinal L_x de GOOS et HÄNCHEN et d'autre part le décalage transversal L_y. L'image virtuelle C'A'B' obtenue ne sera donc plus symétrique de CAB par rapport au dioptre plan, car elle aura subi ces mêmes translations.

Si on éclaire CA en lumière polarisée circulairement gauche et AB en lumière polarisée circulairement droite, l'image C'A' sera décalée vers le haut ($L_y < 0$) et A'B' vers le bas ($L_y > 0$). L'image C'A'B' obtenue sera cassée au point A et aura l'aspect de la figure IV - 2.

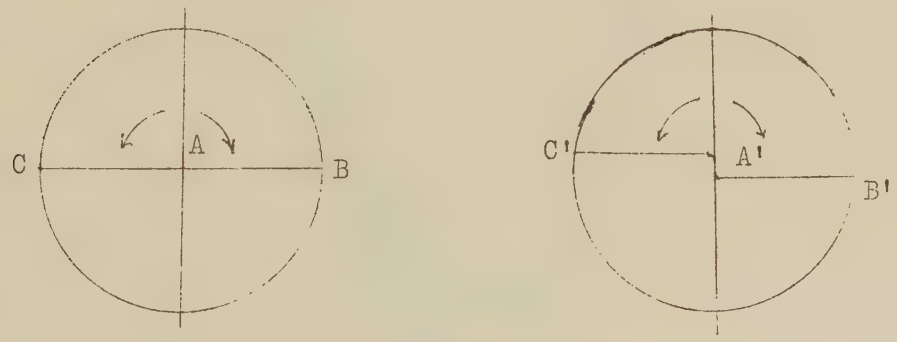


Fig. IV-2.

.../...

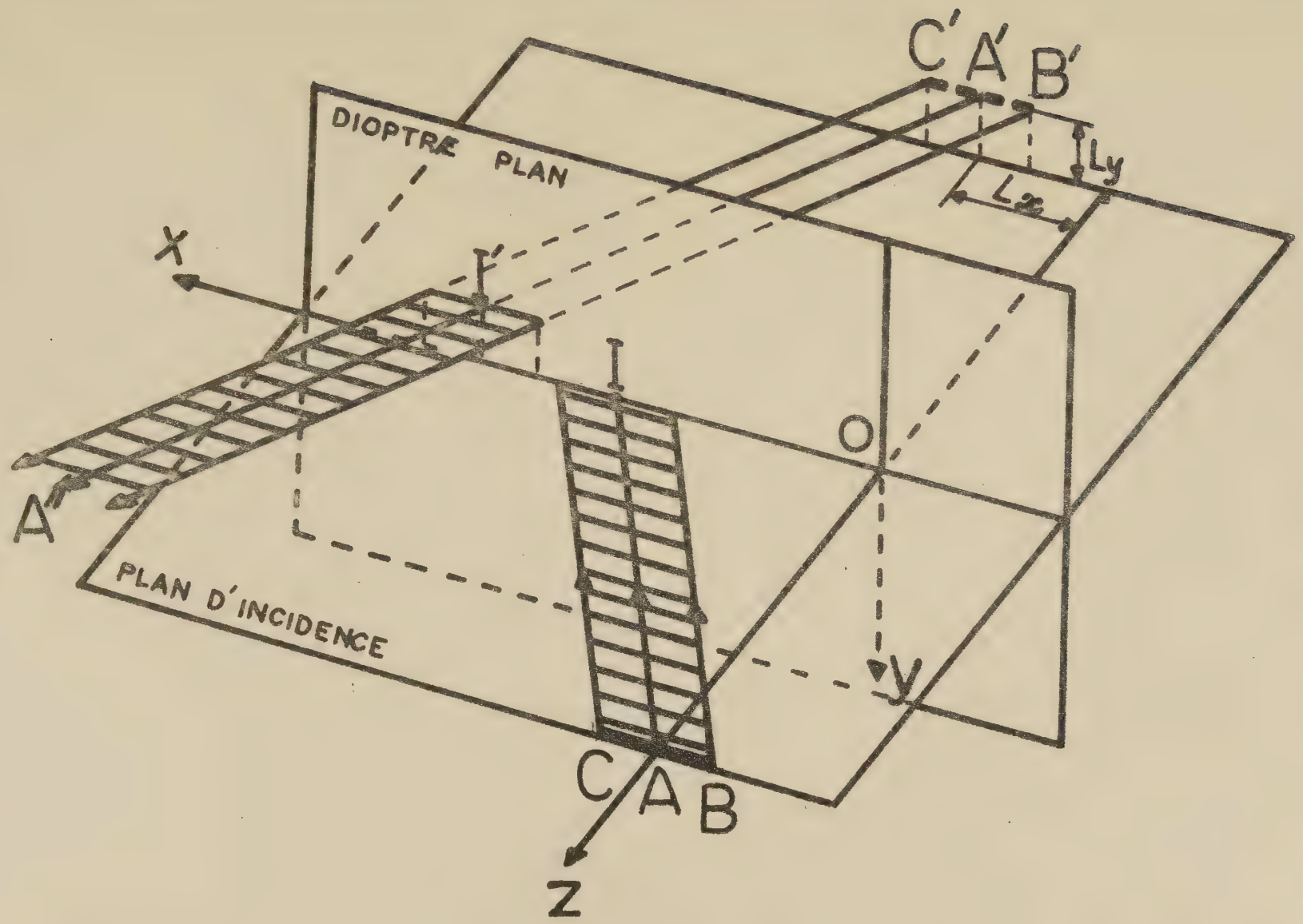


Figure. IV-1

IV-2. Description des systèmes permettant d'amplifier l'effet.

L'effet à mesurer étant petit il sera nécessaire de l'amplifier. Dans l'expérience de GOOS et HÄNCHEN l'amplification était effectuée en faisant se réfléchir le faisceau successivement sur les deux faces d'une lame à faces parallèles (fig. IV-3). Dans le cas du décalage transversal que nous cherchons

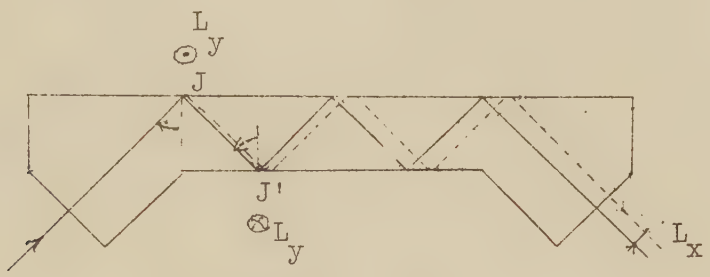


Fig. IV-3.

ce montage ne convient pas car le signe de L_y est fonction d'une part du sens de la polarisation circulaire et d'autre part du signe de l'angle d'incidence. Ainsi au point J, L_y est dirigé comme indiqué sur la figure, mais en J' il est de sens contraire (i devenant alors -i) ; l'effet résultant d'un nombre pair de réflexions sera donc nul.

Pour amplifier le décalage transversal nous avons utilisé deux systèmes. Le premier comporte un prisme F, d'indice de réfraction n = 1,52, dont la section droite est un triangle isocèle RST dont l'angle au sommet est tel qu'un faisceau subissant la réflexion totale quasi limite sur la base ST entre et sort perpendiculairement aux côtés SR et RT (fig. IV-4).

.../...

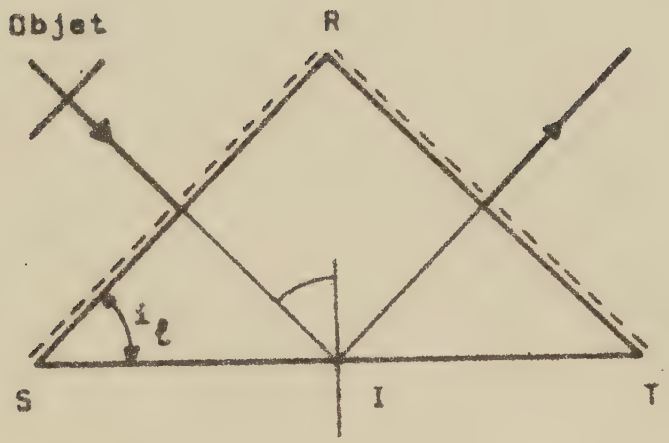


Figure. IV-4

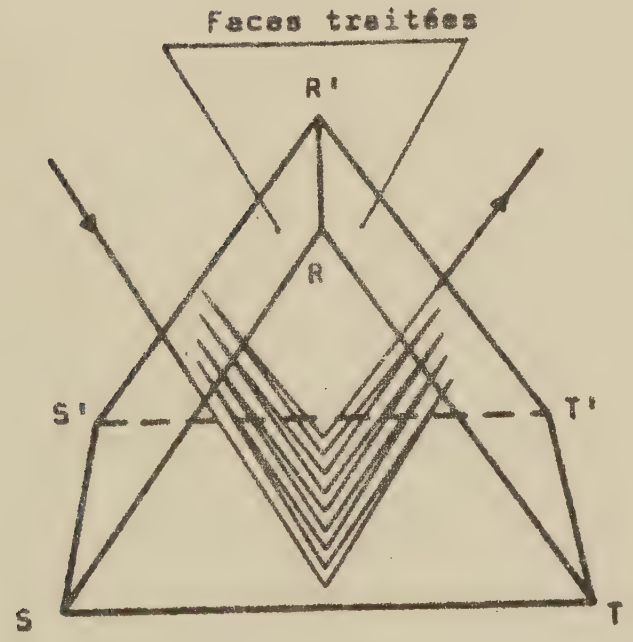


Figure. IV-5

Ces côtés sont revêtus d'une couche métallique semi-transparente, obligeant le faisceau à revenir sur lui-même (comme dans un dispositif de Pérot-Fabry coudé). L'angle d'incidence sur ST étant voisin de l'angle limite la polarisation, lors de cette réflexion totale, est conservée. A chaque réflexion normale sur les côtés RS et RT, le sens de la polarisation (circulaire) est changée ; mais comme, d'autre part, le signe de l'angle d'incidence sur ST l'est aussi, les décalages latéraux L_y prédits par la relation (III-11) s'ajouteront. Afin d'obtenir la séparation des faisceaux émergents successifs on donnera volontairement une très légère obliquité aux plans d'incidence relativement aux arêtes du prisme (fig. IV-5). On peut aussi vérifier que la polarisation circulaire du faisceau tombant initialement sur la face RS est rigoureusement conservée par tous les faisceaux sortant de la face RT (ou RS).

Ce dispositif présente une grande symétrie intrinsèque, ce qui facilite la détermination expérimentale de la valeur du décalage L_y, ainsi que la discussion de l'expérience. Par contre il a l'inconvénient d'absorber beaucoup d'énergie.

Un autre procédé pour augmenter l'effet consistera à faire subir au faisceau incident 28 réflexions limites successives, faisant tourner le faisceau toujours dans le même sens. Nous utiliserons pour cela un prisme droit P d'indice n = 1,8, de section triangulaire équilatérale, dans lequel la lumière parcourt un trajet en forme de polygone régulier ([37]) gauche inscrit dans une hélice circulaire d'axe parallèle aux arêtes du prisme, le réglage de l'incidence limite s'obtenant par contrôle du pas de l'hélice (c'est-à-dire de l'inclinaison θ des plans d'incidence relativement aux arêtes du prisme). Afin de faire entrer et sortir le faisceau deux petits prismes annexes N ont été adhérés sur les faces du prisme principal P (fig. IV-6). La photographie (IV-7a) représente ce prisme P dans lequel le faisceau subit 28 réflexions totales successives. La photographie (IV-7b) montre ce même prisme légèrement déréglé et fait apparaître les divers faisceaux émergents.

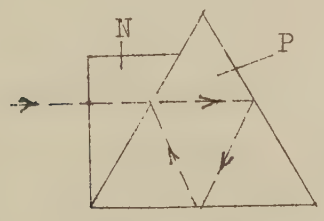


Fig. IV-6.

.../...

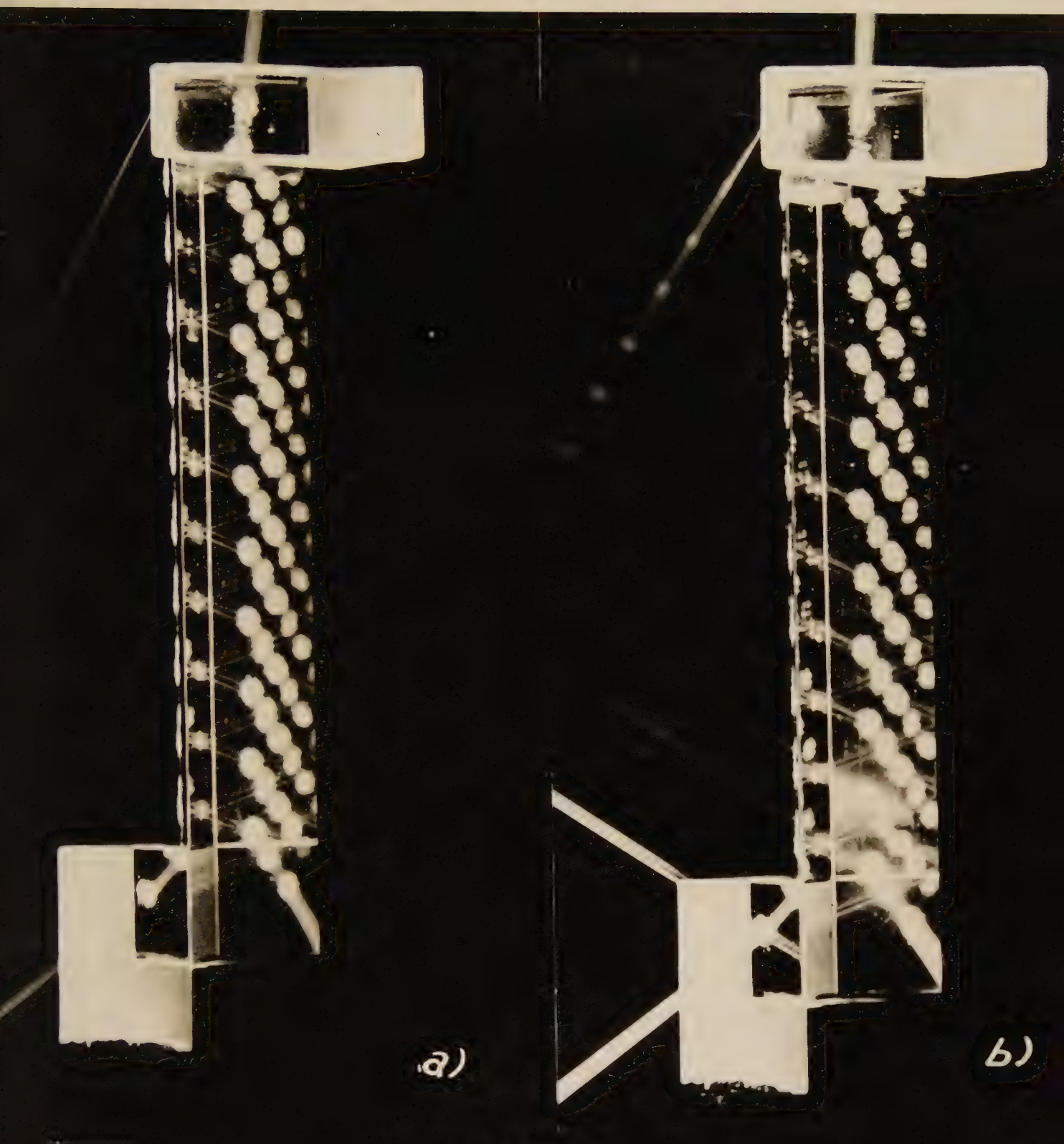


Fig. IV-7

Photographie du prisme montrant le cheminement du faisceau qui subit 28 réflexions quasi-limites.

a) la réflexion est totale ($i > i_\ell$)

b) le prisme est déréglé légèrement ($i < i_\ell$)

IV-3. Description du montage.

Le montage utilisé est représenté sur la figure (IV-8). Un faisceau laser, polarisé rectilignement, après réflexion sur deux miroirs M_1 et M_2 traverse une lame quart d'onde puis une lame demi-onde qui ne le couvre que sur une moitié, la séparation étant verticale. Ce faisceau éclaire ensuite un objet rectiligne horizontal CAB et se réfléchit à l'intérieur du prisme amplificateur P (ou le prisme F). Deux objectifs, O_1 et O_2, projettent l'image C'A'B' de cet objet CAB sur un écran E.

En orientant convenablement les axes de la lame quart d'onde la vibration émergente est polarisée circulairement (section S_1), la partie du faisceau traversant la lame demi-onde voit sa polarisation inversée (section S_2), ainsi l'objet CAB est-il éclairé par de la lumière circulaire droite (ou gauche) dans sa partie CA et circulaire de sens contraire dans sa partie AB (section S_3). Si l'effet recherché existe l'image obtenue sur l'écran a l'aspect E_1. En tournant la lame quart d'onde de $\pi/2$ on échange les polarisations des deux plages et l'aspect observé doit être celui représenté par E_2.

L'objet rectiligne CAB est l'arête rectiligne d'une lame de Wolter ([38]). Cette lame (fig. IV-9) est obtenue en déposant sur la moitié d'un support de verre à faces planes et parallèles une couche mince d'épaisseur telle que le déphasage introduit entre les parties 1 et 2 soit égal à π.

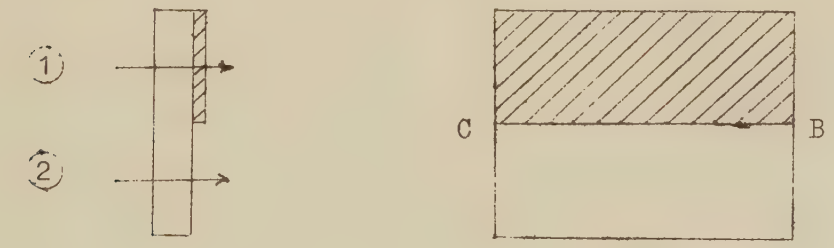


Fig. IV-9.

.../...

Schéma de principe

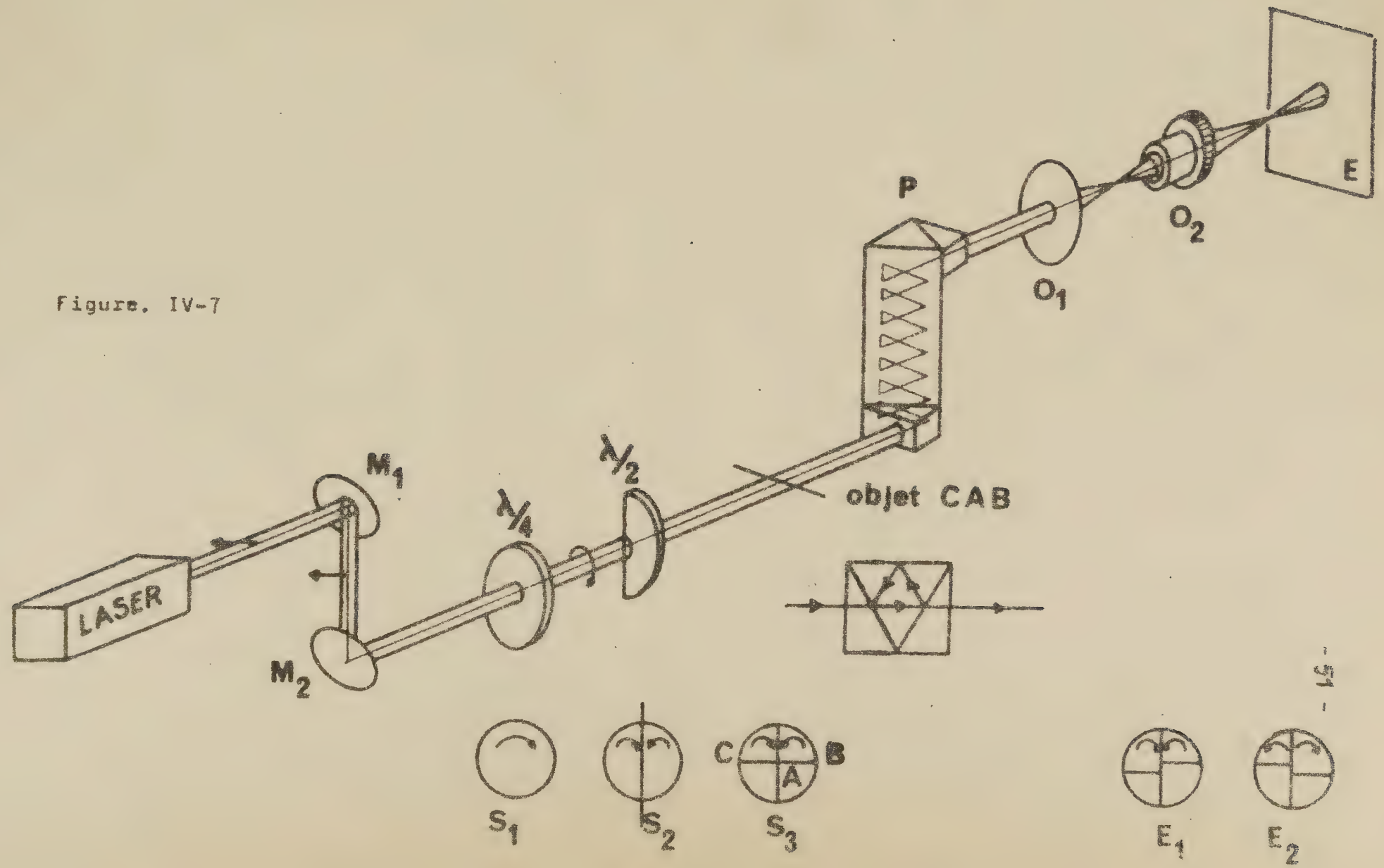


Figure. IV-7

Cette lame permet d'obtenir une image de l'arête extrêmement fine ce qui est nécessaire à la mise en évidence du décalage L_y qui reste faible malgré le nombre de réflexions (20 dans le prisme F, 28 dans le prisme P).

IV-4. Résultats expérimentaux.

Les résultats obtenus sont résumés sur les clichés reproduits sur la figure IV-10. On observe effectivement le décalage escompté avec le signe et la grandeur attendus. Lorsque l'on fait tourner la lame quart d'onde de 90° afin d'échanger les polarisations circulaires sur les deux plages, A'C' et B'A' échangent leurs altitudes ce qui apparaît sur les clichés a et b, la transition étant continue. Si nous tournons la lame quart d'onde de 180° on retombe exactement sur le même champ de franges, ce qui montre l'absence d'artefacts par effet de prisme.

Les mesures les plus précises ayant été effectuées avec le prisme P nous allons comparer la valeur théorique et la valeur expérimentale dans ce cas.

Le faisceau ne restant pas dans le plan de section principale du prisme P, l'objet CAB n'est pas dans le plan d'incidence. Il s'introduit alors un terme correctif, le décalage n'étant plus L_y (fig. IV-11) mais $L'_y = L_y \cos \theta$, θ étant l'angle entre le plan d'incidence et le plan de section principale qui est parallèle à l'objet.

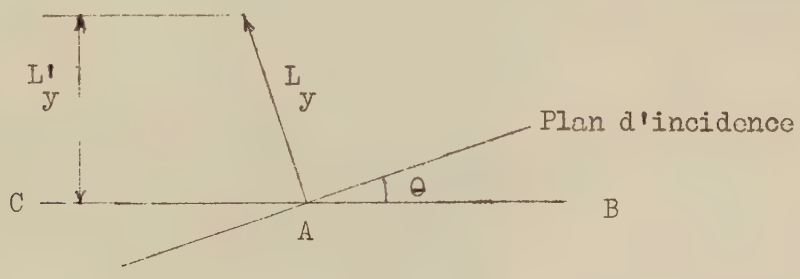
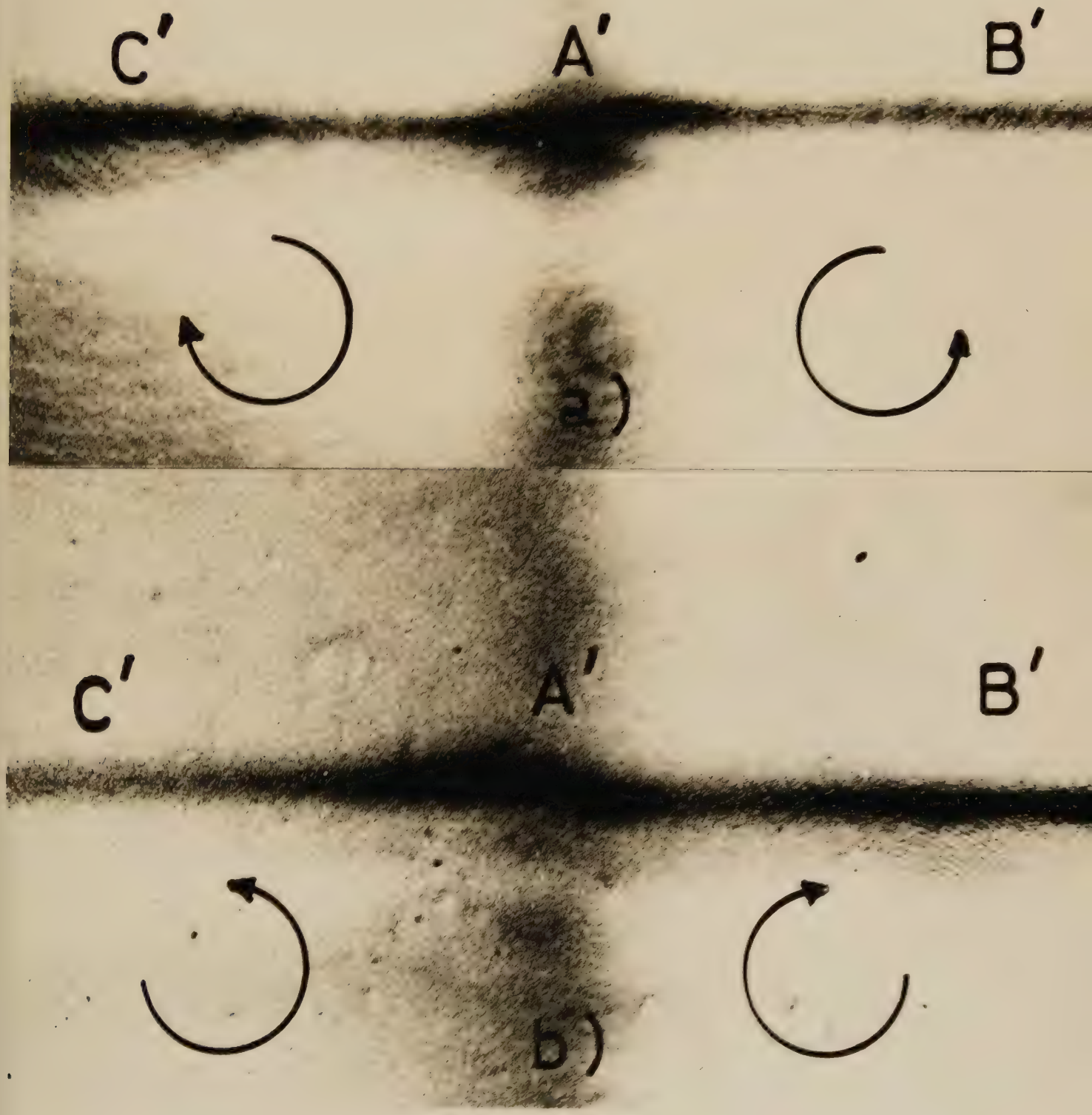


Fig. IV-11

.../...

Figure IV-10



Pour évaluer cos θ considérons le rayon qui après réflexion en I sur la face GFD arrive en I' sur la face GFE (fig. IV-12) du prisme P de section principale FED.

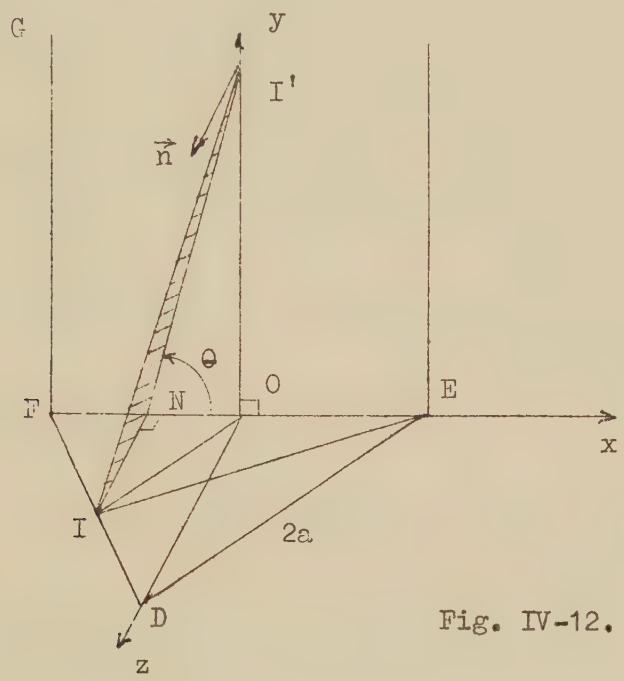


Fig. IV-12.

Le plan d'incidence Π est défini par II' et la normale $\vec{n}$ en I' à la face GFE. La perpendiculaire IN abaissée de I sur FE étant à la fois dans le plan Π et dans le plan FED est donc la droite d'intersection de ces deux plans. Comme IN est perpendiculaire à NO et à NI', l'angle des deux plans est $\widehat{I'NO}=\theta$. En posant DE = 2 a et OI' = y on trouve :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2\,y}{a}$$

L'angle d'incidence ($\vec{n}$, II') est égal à l'angle limite i_1. On a :

$$\cos i_1 = \frac{\overrightarrow{II'} \cdot \overrightarrow{IN}}{|\overrightarrow{II'}| \cdot |\overrightarrow{IN}|} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2 + y^2}} .$$

.../...

On exprime y en adjoignant la relation $\sin i_1 = \frac{1}{n}$:

$$y^2 = \frac{a^2 (4 - n^2)}{4 (n^2 - 1)} ,$$

d'où la valeur de $tg^2 \theta = \frac{4 - n^2}{n^2 - 1}$,

et le terme correctif est : $\cos \theta = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}$.

L'indice du verre étant $n \simeq 1,8$ on a :

$$\cos \theta = 0,865.$$

On peut vérifier cette valeur en remarquant qu'entre θ et l'angle $\theta' = \widehat{I'IO}$ que fait le rayon avec le plan de section principale on a la relation simple :

$$\cos \theta = \frac{n}{2} \cos \theta',$$

or θ' se mesure facilement et est égal à environ 16° ce qui donne $\cos \theta \simeq 0,87$.

Pour S' entre i et i_1 $L_x^{(c)} = 18,36\ L_y^{(c)} \simeq 5,4\ \mu$.

La longueur d'onde de la radiation émise par le laser étant $\lambda = 0,6328\ \mu$ on a $L_y = 0,288\ \mu$ donc $L'_y = 0,288 \times 0,865\ \mu$

En tenant compte des 28 réflexions et du grandissement transversal de 300 du système optique utilisé, la distance théorique entre les images C'A' et A'B' (double du décalage) doit être :

$$\mathcal{L}_{\text{théorique}} = 4,2 \text{ mm}.$$

La mesure nous a donné :

$$\mathcal{L}_{\text{mesurée}} = 4,1 \pm 0,3 \text{ mm}.$$

.../...

IV-5. Vérifications.

Nous avons vérifié que la polarisation circulaire était conservée après passage dans l'un ou l'autre des prismes (P ou F). Pour cela nous avons interposé un analyseur de lumière circulaire sur le faisceau avant puis après le prisme. Nous avons constaté que l'extinction restait complète sur le demi-champ ainsi analysé et qu'il en était de même sur l'autre partie du champ en prenant un analyseur circulaire de sens opposé. Cette opération nous assure que nous sommes bien dans les conditions du calcul c'est-à-dire que la translation totale est bien égale au produit de la translation L'_y par le nombre de réflexions. Signalons qu'avec le prisme F nous avons pu faire cette vérification pour tous les faisceaux émergents.

Notons que notre montage ne permet pas de déceler l'effet GOOS-HÄNCHEN. En effet, en projection horizontale (fig. IV-13), après 28 réflexions le rayon ressort suivant II', les décalages s'étant exactement compensés ; d'autre part en projection verticale un calcul simple montre qu'après 28 réflexions le plan d'incidence a tourné de 6π , ce qui élimine

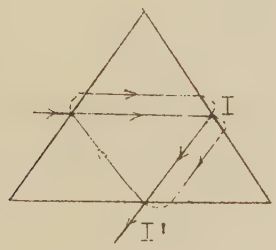


Fig. IV-13.

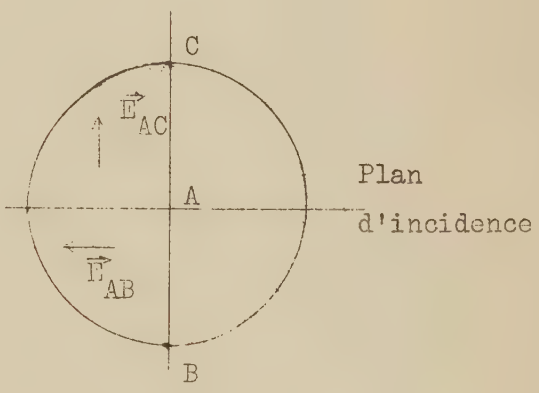


Fig. IV-14

toute possibilité de mise en évidence d'une différence de déplacement L_x suivant la polarisation. En effet, si on éclaire l'objet CAB, placé cette fois-ci perpendiculairement au plan d'incidence, en lumière rectiligne perpendiculaire au plan d'incidence sur CA et parallèle sur AB (fig.IV-14), après une réflexion les déplacements L_x doivent être différents (cette situation correspond d'ailleurs à l'écart maximum ΔL_x) mais à chaque réflexion les deux vibrations E_{AC} et E_{AB} tournent en restant orthogonales ;

.../...

aussi E_{AC} devient parallèle au plan d'incidence et E_{AB} perpendiculaire et ainsi de suite. Après les 28 réflexions on retrouve exactement la situation du départ donc les déplacements L_x subis par CA et AB sont exactement les mêmes, ce que nous avons d'ailleurs vérifié expérimentalement. Remarquons que, dans notre expérience aucune intervention d'effet GOOS-HÄNCHEN n'était à craindre, la polarisation étant circulaire sur les deux plages. Remarquons de même qu'il n'y a pas d'effet de prisme car, comme nous l'avons signalé au paragraphe IV-4, l'image de l'objet CAB est la même pour deux positions à 180° de la lame quart d'onde. Il n'y a d'ailleurs rien d'étonnant à ce qu'un effet de prisme n'intervienne pas, car la lame quart d'onde est placée avant l'objet et une légère déviation du faisceau ne modifierait pas son image.

CONCLUSIONS

L'effet qui vient d'être mis en évidence expérimentalement a été prédit en grandeur et en signe par la théorie de Maxwell y compris l'emploi du tenseur de Maxwell. On sait, en effet, que la densité de courant d'énergie $\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{H}}$ et la densité d'impulsion $\vec{\mathcal{D}} \wedge \vec{\mathcal{B}}$ sont respectivement représentées en relativité par les composantes M^{41}, M^{42}, M^{43} et M^{14}, M^{24}, M^{34} du tenseur à 16 composantes de Maxwell-Minkowski défini par :

$$M^{ij} = - \mathcal{B}^{ik} \; \mathcal{H}^{j}{}_{k} + \frac{1}{4} \; \delta^{ij} \; \mathcal{B}^{kl} \; \mathcal{H}_{kl},$$

avec (en faisant c = 1 ; 1, 2, 3, 4 = i, j, k, l = x, y, z, it)

$$\mathcal{B}^{jk} = \begin{vmatrix} 0 & \mathcal{B}_3 & -\mathcal{B}_2 & -iE_1 \\ -\mathcal{B}_3 & 0 & \mathcal{B}_1 & -iE_2 \\ \mathcal{B}_2 & -\mathcal{B}_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{vmatrix} \qquad \mathcal{H}^{jk} = \begin{vmatrix} 0 & \mathcal{H}_3 & -\mathcal{H}_2 & -i\mathcal{D}_1 \\ -\mathcal{H}_3 & 0 & \mathcal{H}_1 & -i\mathcal{D}_2 \\ \mathcal{H}_2 & -\mathcal{H}_1 & 0 & -i\mathcal{D}_3 \\ i\mathcal{D}_1 & i\mathcal{D}_2 & i\mathcal{D}_3 & 0 \end{vmatrix}$$

Nous nous proposons de montrer que ce tenseur M^{ij} n'est pas réellement satisfaisant et qu'il faut lui préférer celui introduit par L. de Broglie ([39]) ([40]), ce dernier étant défini par :

$$T^{ij} = \mathcal{A}^{k} \; [\partial^{i}] \; \mathcal{A}^{j}{}_{k} \; , \text{ où } [\partial^{i}] = \overrightarrow{\partial^{i}} - \overleftarrow{\partial^{i}} \; .$$

.../...

En effet, la translation L_y est liée à l'existence, dans l'onde évanescente, de la composante M^{4y}. Cette onde se propageant dans le vide, le tenseur M^{ij} est symétrique et $M^{4y} = M^{y4}$: la densité de flux d'énergie et la densité d'impulsion sont identiques, donc la densité d'impulsion de Maxwell a une composante dans la direction y. Nous avons mesuré en signe et en grandeur le flux d'énergie dans cette direction qui est correctement représenté par M^{4y}. Par contre, la densité d'impulsion prédite par ce tenseur est en désaccord avec la définition de l'opérateur d'impulsion quantique $i\hbar\,\overrightarrow{\text{grad}}$ car nos fonctions d'onde, étant indépendantes de y, il ne peut pas y avoir d'impulsion dans cette direction y. Remarquons qu'il est impossible d'ajouter un terme complémentaire à l'opérateur d'impulsion pour lui donner la forme $i\hbar\,\overrightarrow{\text{grad}} + \vec{G}$, par analogie avec ce qui est possible dans le cas de l'électron, car dans le vide on ne peut pas trouver de vecteur $\vec{G}$.

On sait que le tenseur T^{ij} de L. de Broglie a précisément été défini comme densité d'impulsion énergie associée à l'opérateur $i\hbar\partial^i$. Montrons par un raisonnement d'analyse dimensionnelle que (à un facteur près) T^{ij} est la seule densité d'impulsion énergie associée à cet opérateur ($^{41}_{\text{II}}$). En effet, d'après les principesde la mécanique quantique, la densité cherchée doit contenir $[\partial_i]$, l'indice i devant rester libre. Le tenseur cherché doit être du second rang et quadratique dans les grandeurs de champ. On ne peut pas, dans ces conditions, prendre deux fois le champ ou deux fois le potentiel. Il faut donc associer le champ et le potentiel, puis contracter une des paires d'indices. La contraction sur les deux indices du champ étant exclue comme donnant zéro, la seule possibilité est donc d'écrire, en champs réels :

$$T^{ij} = \text{cte} \times \mathcal{A}^k \; [\partial^i] \; \mathcal{A}^j_k \; .$$

La théorie du photon de L. de Broglie montre que la constante vaut 1.
Par construction même ce tenseur nous donne une composante $T^{y4} \equiv 0$. Il faut donc maintenant vérifier que les trois composantes T^{4u} sont égales aux composantes M^{4u} du tenseur de Maxwell, celles-ci ayant donné les bonnes prévisions physiques.

Nous présentons cette démonstration ($^{42}_{\text{II}}$) dans le cas où l'onde est harmonique. On choisit la jauge particulière $\mathcal{A}^4 = i\,v = 0$ dans le repère lié au dioptre.

.../...

Nous avons : $\mathcal{A}^4 = i\,v = 0$, $\vec{\mathcal{A}} = \frac{j}{\omega}\,\vec{\mathcal{E}}$ car $\vec{\mathcal{E}} = -\partial_t \vec{\mathcal{A}}$.

L'imaginaire $\sqrt{-1}$ est noté j sauf s'il provient de $x^4 = i\,t$, où il sera noté i car les complexes conjugués ne portent jamais sur i. On a en notations complexes

$$8\,T^{4u} = \mathcal{A}^{k*}\,\partial_4\,\mathcal{H}^u_k - \mathcal{H}^u_k\,\partial_4\,\mathcal{A}^*_k + \text{conjugué}$$

avec :

$$\mathcal{A}^k = \frac{j}{\omega}\,\mathcal{E}^k = -\frac{j}{\omega}\,i\,\mathcal{B}^{4k} \quad \text{d'où} \quad \partial_4\,\mathcal{A}^k = \mathcal{B}^{4k}$$

et :

$$\partial_4\,\mathcal{H}^u_k = -\,j\,\omega\,i\,\mathcal{L}^u_k.$$

En remplaçant dans T^{4u} on obtient :

$$8\,T^{4u} = -\,\mathcal{B}^{4k*}\,\mathcal{H}^u_k - \mathcal{H}^u_k\,\mathcal{B}^{4k*} + \text{conjugué}.$$

Les composantes du tenseur de Maxwell sont :

$$4\,M^{4u} = -\,\mathcal{B}^{4k*}\,\mathcal{H}^u_k + \frac{1}{4}\,\delta^{4u}\,\mathcal{B}^{kl*}\,\mathcal{H}_{kl} + \text{conjugué}.$$

Le dernier terme de M^{4u} s'annulant puisque $u \neq 4$, on a :

$$T^{4u} = M^{4u}.$$

Donnons, à titre indicatif, les expressions de quelques-unes des composantes de ces deux tenseurs pour l'onde transmise par le dioptre plan ($^{20}_{\,''}$) ($^{42}_{\,''}$ à $^{44}_{\,''}$). Pour simplifier l'écriture nous omettrons l'indice t, caractéristique du second milieu.

.../...

$$4i\, M^{4x} = \left[E_\perp E_\perp^* (\alpha \gamma + \alpha^* \gamma^*) + E_{/\!/} E_{/\!/}^* (\alpha^* \gamma + \alpha \gamma^*)\right] P P^*$$

$$4i\, M^{4y} = (\alpha \gamma^* - \alpha^* \gamma)(\gamma^* E_\perp^* E_{/\!/} - \gamma E_\perp E_{/\!/}^*) P P^*$$

$$4i\, M^{4z} = \left[E_\perp E_\perp^* (\gamma \gamma + \gamma^* \gamma^*) + E_{/\!/} E_{/\!/}^* (\gamma^* \gamma + \gamma \gamma^*)\right] P P^*$$

$$4i\, M^{x4} = \mu \left[(\varepsilon^* \gamma \alpha + \varepsilon \gamma^* \alpha^*) E_\perp E_\perp^* + (\varepsilon^* \gamma \alpha^* + \varepsilon \gamma^* \alpha) E_{/\!/} E_{/\!/}^*\right] P P^*$$

$$4i\, M^{y4} = \mu (\alpha \gamma^* - \alpha^* \gamma)(\gamma^* \varepsilon E_{/\!/} E_\perp^* - \gamma \varepsilon^* E_{/\!/}^* E_\perp) P P^*$$

$$4i\, M^{z4} = \mu \left[(\varepsilon^* \gamma \gamma + \varepsilon \gamma^* \gamma^*) E_\perp E_\perp^* + (\varepsilon^* \gamma \gamma^* + \varepsilon \gamma^* \gamma) E_{/\!/} E_{/\!/}^*\right] P P^*$$

$$4\, M^{44} = \left[\frac{\varepsilon + \varepsilon^*}{2} \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \mu \vec{H} \cdot \vec{H}^*\right] P P^*$$

$$4\, M^{yx} = 4\, M^{xy} = -\mu \left[E_\perp E_{/\!/}^* (\gamma \gamma^* \gamma - \gamma^{*2} \gamma^*) + E_\perp^* E_{/\!/} (\gamma \gamma^* \gamma^* - \gamma^2 \cdot \gamma)\right] P P^*$$

$$4\, M^{yy} = -\mu \left\{E_{/\!/} E_{/\!/}^* \left[(\gamma^{*2} + \gamma^2)(\gamma \gamma^* + \alpha \alpha^*) - 2 \gamma \gamma^*\right] + E_\perp E_\perp^* \left[2 \gamma \gamma^* (\gamma \gamma^* + \alpha \alpha^*) - (\gamma^2 + \gamma^{*2})\right]\right\} P P^*$$

$$4\, M^{yz} = 4\, M^{zy} = -\mu E_\perp E_{/\!/}^* (\gamma^{*2} \alpha^* - \gamma \gamma^* \alpha) + E_\perp^* E_{/\!/} (\gamma^2 \alpha - \gamma \gamma^* \alpha^*)\Big] P P^*$$

$$4i\, T^{4x} = 4i\, M^{4x}$$

$$4i\, T^{4y} = 4i\, M^{4y}$$

$$4i\, T^{4z} = 4i\, M^{4z}$$

$$8i\, T^{x4} = \mu (\varepsilon + \varepsilon^*)(\gamma \alpha + \gamma^* \alpha^*) \vec{E} \cdot \vec{E}^* \; P P^*$$

$$8i\, T^{y4} = 0$$

$$8i\, T^{z4} = \mu (\varepsilon + \varepsilon^*)(\gamma \gamma + \gamma^* \gamma^*) \vec{E} \cdot \vec{E}^* \; P P^*$$

$$4\, T^{44} = (\varepsilon + \varepsilon^*) \vec{E} \cdot \vec{E}^* \; P P^*$$

$$T^{yx} = 0$$

$$T^{yy} = 0$$

$$T^{yz} = 0$$

Pour obtenir les valeurs relatives à l'onde évanescente il suffit de faire $\Upsilon = \Upsilon^*$, α réel, $\gamma = \frac{j}{c_1} \sqrt{\alpha_i^2 - \alpha_1^2}$ dans ces expressions.

On constate que $T^{4u} = M^{4u}$, donc que le tenseur T^{ij} donne, avec cette jauge, les mêmes flux d'énergie que le tenseur M^{ij}, donc les mêmes prédictions pour les décalages L_x et L_y. On remarque d'autre part que la densité d'impulsion (de composantes T^{u4}) est telle que $T^{y4} = 0$ et est colinéaire au vecteur d'onde $\vec{K}$, ce qui est physiquement satisfaisant.

Le tenseur de Maxwell, étant symétrique dans le vide, nous conduit à une prédiction erronée pour l'impulsion. Le tenseur de L. de Broglie n'étant pas symétrique conduit à la bonne valeur. Ceci avait été une idée directrice des travaux de O. Costa de Beauregard ($^{14}_{\text{"}}$ à $^{17}_{\text{"}}$) et de Weyssenhof ($^{6}_{\text{"}}$) et de divers auteurs. Ce tenseur satisfait d'ailleurs à la relation canonique :

$$T^{ji} - T^{ij} = \partial_k \, \sigma^{[ijk]}$$

où dans le vide $\sigma^{[ijk]} = \sum_{\text{circ}} \mathcal{A}^i \, \mathcal{B}^{jk}$ représente la densité de spin de L. de Broglie.

$\sigma^{[ijk]}$ étant complètement antisymétrique, les deux tenseurs T^{ij} et T^{ji} diffèrent par un tenseur de divergence nulle :

$$\partial_{jk} \, \sigma^{[ijk]} \equiv 0.$$

Il est dans ces conditions important d'expliquer que les deux intégrales :

$$I_1 = \iint T^{y4} \, dx \, dz \equiv 0, \qquad I_2 = \iint T^{4y} \, dx \, dz = \Phi_y \neq 0,$$

étendues au plan entier $y = 0$, ne sont pas égales.

En effet, la formule simple $\sigma^{[ijk]} = \sum_{\text{circ}} \mathcal{A}^i \, \mathcal{B}^{jk}$ n'est plus vérifiée dans le dioptre et on ne peut pas faire jouer la formule :

$$\iint (T^{y4} - T^{4y}) \, dx \, dz = \oint \vec{\sigma} \cdot \vec{dl},$$

$\vec{\sigma}$ ayant des valeurs différentes de part et d'autre de $z = 0$. Remarquons d'ailleurs qu'en appliquant cette dernière formule au contour représenté sur la figure III-4 on est ramené au précédent calcul de Φ (paragraphe III-3).

.../...

Le fait d'admettre que le bon tenseur d'impulsion-énergie contient le quadri-potentiel confère à ce dernier une certaine réalité physique. Savoir si l'on pourra fixer une jauge des potentiels revient à chercher des cas où les valeurs des grandeurs telles que : énergie, impulsion, flux d'énergie, dépendent de la jauge (ce qui n'est pas le cas pour l'onde plane monochromatique). Nous allons montrer maintenant ([45]) que les propriétés de l'onde évanescente sont précisément telles que si l'on décide, en vertu des précédents arguments, de considérer le tenseur de L. de Broglie comme le bon tenseur d'impulsion-énergie, la jauge se trouvera fixée par la théorie, à partir des données expérimentales.

Nous avons montré au chapitre III que les déplacements L_x et L_y étaient respectivement déterminés par :

$$\text{(C-1)} \qquad L_x = \frac{\int_{-\infty}^{0} \mathcal{S}_x^t \, dz}{\mathcal{S}_z^r} \, , \qquad L_y = \frac{\int_{-\infty}^{0} \mathcal{S}_y^t \, dz}{\mathcal{S}_z^r}$$

relations dans lesquelles apparaît le vecteur de Poynting, c'est-à-dire la densité de courant d'énergie de Maxwell-Minkowski. Ayant montré qu'il fallait préférer à ce tenseur celui de L. de Broglie, nous avons vérifié que ce dernier donnait les mêmes déplacements pour une jauge telle que $\mathcal{A}^4 = i\,v = 0$. Nous allons maintenant supposer que le potentiel scalaire est différent de zéro et chercher si L_x et L_y restent inchangés, ce qui est nécessaire puisque l'expérience les a confirmés.

On peut considérer que le potentiel total, $\vec{\mathcal{A}} + \vec{a}$, v, est la somme du potentiel transversal $\vec{\mathcal{A}}$, $v = 0$ et du potentiel de jauge $\vec{a}$, v. Ayant calculé le tenseur T^{ij} de L. de Broglie relatif aux potentiels $\vec{\mathcal{A}}$, $v = 0$, il suffit de lui ajouter celui relatif aux potentiels $\vec{a}$, v ; soit t^{ij} ce tenseur complémentaire.

Nous devons avoir $\vec{\mathcal{B}} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\mathcal{A}} = \text{rot}(\vec{\mathcal{A}} + \vec{a})$ alors $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{a} = 0$ et $\partial_x a_y = \partial_z a_y = 0$ car $\partial_y a_z = \partial_y a_x = 0$. Comme $\vec{\mathcal{E}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,v - \partial_t(\vec{\mathcal{A}} + \vec{a}) = \partial_t \vec{\mathcal{A}}$ on a aussi : $\partial_t a_y + \partial_y v = 0$, d'où $\partial_t a_y = 0$. a_y ne dépendant ni du temps, ni des coordonnées x, y, z, peut être considéré comme nul.

Cherchons dans ces conditions à représenter a_x, a_z et v par des constantes $\overline{a_x}$, $\overline{a_z}$ et V, que multiplie le facteur de propagation P. On doit avoir :

$$\partial_z a_x - \partial_x a_z = - j\, k\, (\gamma\, a_x + \alpha\, a_z) = 0,$$

$$\partial_x v + \partial_t a_x = j\, (- k\, \alpha\, v + \omega\, a_x) = 0,$$

$$\partial_z v + \partial_t a_z = j\, (- k\, \gamma\, v + \omega\, a_z) = 0,$$

conditions auxquelles on adjoint la relation de Lorentz :

$$\operatorname{div} \vec{a} + \varepsilon\, \mu\, \partial_t v = 0.$$

La solution $a_x = \alpha\, v \sqrt{\varepsilon\, \mu}$, $a_z = \gamma\, v \sqrt{\varepsilon\, \mu}$, répond au problème puisqu'elle satisfait les relations précédentes. Laissant V arbitraire, on peut représenter le quadri-potentiel complémentaire pour les ondes incidente, réfléchie et transmise, par :

$$\text{(C-2)} \quad \begin{array}{l} \overline{a}^i\, e^{-j[k_i(\alpha_i x + \gamma_i z) - \omega t]} \\ \overline{a}^r\, e^{-j[k_i(\alpha_i x - \gamma_i z) - \omega t]} \\ \overline{a}^t\, e^{-j[k_t(\alpha_t x + \gamma_t z) - \omega t]} \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \overline{a}^i = (\alpha_i\, V_i \sqrt{\varepsilon_i},\ 0,\ \gamma_i\, V_i \sqrt{\varepsilon_i}) \\ \overline{a}^r = (\alpha_i\, V_r \sqrt{\varepsilon_i},\ 0,\ -\gamma_i\, V_r \sqrt{\varepsilon_i}) \\ \overline{a}^t = (\alpha_t\, V_t \sqrt{\varepsilon_t},\ 0,\ \gamma_t\, V_t \sqrt{\varepsilon_t}) \end{array}$$

On remarque que pour l'onde évanescente, comme pour les ondes incidente et réfléchie, le quadri-potentiel de jauge est proportionnel à la quadri-fréquence.

Les potentiels V_i, V_r et V_t ne sont pas indépendants. En effet, si U est la fonction échelon de Heaviside, égale à zéro pour $z > 1$ et à 1 pour $z < 0$, on a :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left[\vec{a}^i + \vec{a}^r + U(\vec{a}^t - \vec{a}^i - \vec{a}^r)\right] = \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{a}^i + \vec{a}^r) + U \operatorname{rot}(\vec{a}^t - \vec{a}^i - \vec{a}^r) + \overrightarrow{\operatorname{grad}} U \wedge (\vec{a}^t - \vec{a}^i - \vec{a}^r) = 0$$

avec $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U = \vec{n}\, \delta(y)$, $\vec{n}$ étant le vecteur unité normal au dioptre. Le second membre étant la somme d'une fonction discontinue et d'une distribution concentrée sur la surface de discontinuité, ne peut être nulle que si la distribution est nulle, c'est-à-dire si $a_x^t = a_x^i + a_x^r$. Cette égalité jointe aux relations (C-2) - donne, puisque $\alpha_t = \alpha_i \sqrt{\dfrac{\varepsilon_i}{\varepsilon_t}}$:

.../...

$$V_t = V_i + V_r.$$

Calculons maintenant le tenseur de L. de Broglie complémentaire :

$$t^{ij} = \frac{1}{8} \alpha_k^* \left[\partial_i\right] \mathcal{H}^{jk} + \text{conjugué},$$

qui est à ajouter au tenseur T^{ij} calculé précédemment (dans lequel on avait fait $\vec{a} = 0$, $v = 0$). Pour simplifier nous considérons α et γ réels mais δ complexe, ce qui nous permettra d'utiliser le résultat pour l'onde évanescente.

On a alors :

$$8\, t^{4x} = 2\, ijk \sqrt{\varepsilon}\ (\delta^* - \delta)\ (E_{//}\, V^* + E_{//}^*\, V)\ P\, P^*,$$

$$8\, t^{4y} = 2\, ijk \sqrt{\varepsilon}\ (\alpha^2 + \delta\delta^* - 1)\ (E_{\perp}\, V^* - E_{\perp}^*\, V)\ P\, P^*,$$

$$8\, t^{4z} = 0,$$

$$8\, t^{x4} = 2\, ijk\, \alpha^2\, \varepsilon \sqrt{\varepsilon}\ (\delta^* - \delta)\ (E_{//}\, V^* + E_{//}^*\, V)\ P\, P^*,$$

$$8\, t^{y4} = 0,$$

$$8\, t^{z4} = ijk\, \alpha\, \varepsilon \sqrt{\varepsilon}\, (\delta^* + \delta)\ (\delta^* - \delta)\ (E_{//}\, V^* + E_{//}^*\, V)\ P\, P^*,$$

$$8\, t^{44} = 2\, jk\, \varepsilon\, \alpha\ (\delta - \delta^*)\ (E_{//}\, V^* + E_{//}^*\, V)\ P\, P^*,$$

$$t^{yx} = 0,$$

$$t^{yy} = 0,$$

$$t^{yz} = 0,$$

$$t^{xz} = t^{zx} = t^{zy} = t^{zz} = t^{z4} = 0.$$

On remarque que pour l'onde incidente (α, δ, $E_{//}$, $E_{\perp}$, ε, k, V, $P\, P^*$, $= \varepsilon_i$, δ_i, $E_{//}^i$, $E_{\perp}^i$, ε_i, k_i, V_i, $P^i\, P^{i*}$) comme pour l'onde réfléchie, δ étant réel, tous les termes sont nuls. Pour l'onde évanescente dans le vide (α_t, $\delta_t = j\sqrt{\alpha_i^2 - \alpha_1^2}$, $E_{//}^t = \tau_{//} E_{//}^i$, $E_{\perp}^t = E_{\perp}^i \tau_{\perp}$, $\varepsilon_t = 1$, k_t, V_t, $P^t\, P^{t*} = \exp\,(2\, k_t \sqrt{\alpha_t^2 - 1}) = e^{\rho z}$) en posant :

.../...

$$R = E^i_{/\!/}\, \tau_{/\!/}\, V^*_t + E^{i*}_{/\!/}\, \tau_{/\!/}\, V_t \qquad \text{et} \qquad S = j\,(E^i_\perp\, \tau_\perp\, V^*_t - E^{i*}_\perp\, \tau_\perp\, V_t),$$

le tenseur t^{ij} devient :

$$(C\text{-}3) \quad t^{ij} = \frac{k_t}{2}\, e^{\rho z} \begin{vmatrix} \alpha_t(\alpha_t^2-1)^{\frac{1}{2}} R & \alpha_t(\alpha_t^2-1)\, S & 0 & i\alpha_t^2(\alpha_t^2-1)^{\frac{1}{2}} R \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i(\alpha_t^2-1)^{\frac{1}{2}} R & i(\alpha_t^2-1)\, S & 0 & -\alpha_t(\alpha_t^2-1)^{\frac{1}{2}} R \end{vmatrix}$$

Nous voyons que le potentiel de jauge donne une densité de courant d'énergie, dans l'onde évanescente, qui vient s'ajouter à celle due aux potentiels transversaux. Il faut pour obtenir la valeur des déplacements L_x et L_y, ajouter aux numérateurs et aux dénominateurs les termes correspondants de t^{ij} dans les relations (C-1). On a vu plus haut qu'en ce qui concerne l'onde incidente tous ses termes sont nuls ; les dénominateurs de (C-1) restent donc inchangés. Il en résulte, puisque les formules (C-1) sont conformes à l'expérience, que les flux qui sont à ajouter aux numérateurs doivent être nuls, ce qui entraîne :

$$R = S = 0.$$

Hormis le cas de l'incidence limite de réflexion totale ($\alpha_t = 1$), où ne subsiste que la condition $R = 0$, on a donc :

$$(\tau_{/\!/}\, \tau^*_\perp\, E^i_{/\!/}\, E^{i*}_\perp + \tau^*_{/\!/}\, \tau_\perp\, E^{i*}_{/\!/}\, E^i_\perp)\, V_t = 0.$$

Le premier facteur étant, en général, différent de zéro, cette égalité ne peut être satisfaite que si $V_t = 0$. <u>Il en résulte que le potentiel longitudinal de jauge doit être choisi nul</u>.

Il est intéressant de remarquer que dans l'onde évanescente on a :

$$\frac{T^{x4}}{T^{44}} = \frac{K_x}{\omega} > 1,$$

alors qu'on avait : $\dfrac{M^{x4}}{M^{44}} < 1.$

.../...

On a d'ailleurs :

$$\frac{\iiint T^{x4} \; dx\, dy\, dz}{\iiint T^{44} \; dx\, dy\, dz} = \frac{K_x}{\omega} > 1.$$

Le rapport de la composante x de l'impulsion intégrale à l'énergie intégrale est précisément égal au rapport de l'impulsion $\hbar K_x$ du photon dans la direction x, à son énergie $\hbar \omega$, ce qui est tout à fait satisfaisant du point de vue quantique. Par contre le fait que ce rapport soit supérieur à un est paradoxal.

Si l'on cherche l'origine de ce paradoxe ([46]) ([47]) on trouve qu'il résulte directement de la valeur imaginaire de γ_t dans l'onde évanescente, ce qui rend imaginaire la composante $\hbar K_z$ de l'impulsion du photon dans la direction z. En d'autres termes, le fait qu'une des composantes de l'impulsion soit imaginaire entraîne des conséquences tout à fait analogues à celles dues au caractère imaginaire de la masse propre de certaines particules baptisées tachyons ([48]) ([49]).

Monsieur le Professeur A. Maréchal, Directeur Général de l'Institut d'Optique, m'a permis d'entreprendre ce travail dans ses laboratoires et a suivi avec intérêt l'évolution et l'aboutissement de cette étude. Je voudrais lui témoigner ici l'expression de ma profonde gratitude.

Monsieur le Professeur A. Kastler, m'a accordé plusieurs entretiens et a accepté d'être Président de mon jury de thèse. Je le remercie très vivement de l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail.

Au cours de très nombreuses et cordiales discussions, Monsieur O. Costa de Beauregard, Maître de recherche au C.N.R.S., qui a dirigé cette recherche, m'a très amicalement encouragé et activement guidé dans ce travail. Qu'il trouve ici le témoignage de ma très profonde reconnaissance.

Je remercie très vivement Monsieur J. Ricard, pour nos très fréquentes et amicales discussions ayant abouti à des publications communes sur ce sujet.

A chacun de ses voyages à Paris, Monsieur J. Pavageau, Professeur à la faculté de Beyrouth, m'a accordé plusieurs entretiens fructueux, qu'il me soit permis de le remercier ici.

Je remercie aussi Monsieur le Professeur S. Lowenthal ainsi que Monsieur G. Nomarski, Directeur de recherche au C.N.R.S., pour leurs conseils et leurs suggestions.

Mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur le Professeur L. de Broglie et de nouveau au Professeur A. Kastler, qui, en présentant diverses notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, ont fait connaître mes résultats sans attendre la publication de ce mémoire.

Je remercie également tous mes collègues pour l'aide amicale qu'ils ont bien voulu me donner.

BIBLIOGRAPHIE

(1) J. Frenkel. Zeitschrist für Physik, 37, 1926, p.246.

(2) M. Mathisson. Zeitschrist für Physik, 67, 1931, p.270 et 826.
Math. Ann., 107, 1933, p.400.
Acta Phys. Pol., 6, 1937, p.163 et 218.

(3) A. Proca. Thèse. Annales de Physique, 20, 1933, p. 415-418.

(4) O. Costa de Beauregard. Thèse. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 22, 1943, p. 118-136.

(5) J. Weyssenhof et A. Raabe. Acta Phys. Pol., 9, 1947, p.7 et 19.

(6) J. Weyssenhof. Acta Phys. Pol., 9, 1947, p.26 et 34 et p.46.

(7) A. Papapetrou. Proc. Royal Irish Ac., 52, 1948, p.11.
Proc. Royal Soc., 209, 1951, p.248.

(8) T. Takabayasi. Prof. Theor. Phys., 8, 1952, p.143.

(9) D. Bohm et J.P. Vigier. Phys. Rev., 109, 1958, p.1882.

(10) F. Halbwachs. Thèse : Théorie relativiste des particules à spin.
Gauthiers-Villars, Paris, 1960, p.31 et suivantes.

(11) D.W. Sciama. Proc. of the Cambridge Phylosophical Soc., 54, 1958, p.72.

(12) D.W. Sciama. Journal of Mathematical Physics, 2, 1961, p.472.

(13) T.W.B. Kibble. Jl of Math. Phys., 2, 1961, p.212.

(14) O. Costa de Beauregard. Phys. Rev., 134, 1964, p. B471.

(15) " " Ann. Inst. H. Poincaré, 2, 1965, p. A131.

.../...

(16) O. Costa de Beauregard. Cahiers de Physique, 18, 1964, p. 471.

(17) " " Phys. Rev., 139, 1965, p. B1443.

(18) " " Cahiers de Physique, 11, 1957, p. 137.

(19) F. Borgnis. Ann. Phys. t.35, 1939, p. 276.

(20) Ch. Imbert. C.R., 265, série B, 1967, p. 797.

(21) Ch. Imbert. C.R., 266, série B, 1968, p. 656.

(22) J. Pavageau, C.R., 263, série B, 1966, p. 276.

(23) Ch. Imbert. C.R., 264, série B, 1967, p. 12.

(24) Ch. Imbert. C.R., 267, série B, 1968, p. 105.

(25) J. Ricard. C.R., 261, série B, 1965, p. 1622.
" " 263, série B, 1966, p. 1108, 1219, 1308.
" Ann. des Télécommunications, 22, n°5 et 6, p.122, 1967.

(26) F. GOOS et M. Hänchen, Ann. Phys., 1, 1947, p.333.

(27) N. Kristoffel, Scientific Acta of Tartu State University, 1956.

(28) Rémi. H. Renard. J.O.S.A., 54, 1964, p. 1190.

(29) K. Artmann, Ann. Phys., 2, 1948, p. 87.

(30) C.V. Fragstein, Ann. Phys., 4, 1949, p. 271.

(31) Jorge L. Agudin, Phys. Rev., 171, n°5, 1968, p. 1385.

(32) Ch. Imbert. C.R., 267, série B, 1968, p. 1401.

(33) O. Costa de Beauregard. C.R., 268, série A, 1969, p. 302.

(34) Ch. Imbert. C.R., 269, série B, 1969, p. 1227.

(35) " " " 270, " , 1970, p. 529.

(36) " " Physics letters, 31A, 337, 1970.

.../...

(37) L'idée de faire parcourir à la lumière un trajet hélicoïdal a été suggérée par MM. O. Costa de Beauregard et Ch. Goillot.

(38) Wolter. Handbuch der Physik, 24, 1956, p. 582.

(39) L. de Broglie. La mécanique ondulatoire du photon, Hermann, 1940, p.186 à 192.

(40) L. de Broglie. Mécanique ondulatoire du photon et théorie quantique des champs, Gauthiers-Villars, 1957, p. 42 et 43.

(41) O. Costa de Beauregard. C.R., série B, 1970, séance du 1er avril.

(42) Ch. Imbert et J. Ricard. C.R., 266, série B, 1968, p. 131.

(43) Ch. Imbert, C.R., 264, série B, 1967, p. 286.

(44) J. Ricard. C.R., 270, série B, 1970, p. 381 et 661.

(45) Ch. Imbert et J. Ricard, C.R., 270, série B, 1970, séance du 13 avril.

(46) O. Costa de Beauregard, C.R., 270, série B, 1970, p. 773.

(47) " " " 270, série B, 1970, séance du 23 mars.

(48) G. Feinberg. Phys. Rev., 159, 1967, p. B1089.

(49) O.M.P. Bilaniuk, V.K. Deshpande, E.C.G. Sudarshan, Am. J. Phys., 30,718,1962.